

北京大学物理学丛书

The Series of Advanced Physics of Peking University

物理学中的非线性方程

北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学物理学丛书

物理学中的非线性方程

刘式适　刘式达　编著



北京大学出版社

The Series of Advanced Physics of Peking University

Nonlinear Equations in Physics

Liu Shikuo   Liu Shida

Peking University Press
Beijing

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的非线性方程/刘式适,刘式达编著. —北京:北京大学出版社,2000.7

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-04533-6

Ⅰ. 物… Ⅱ. ①刘… ②刘… Ⅲ. 物理学-非线性方程 Ⅳ. O415

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第64607号

书　　名:物理学中的非线性方程
著作责任者:刘式适　刘式达编著
责任编辑:周月梅　王　妍
责任校对:李升兰
标准书号:ISBN 7-301-04533-6/O·465
出 版 者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者:北京因温特有限公司
印 刷 者:北京大学印刷厂印刷
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
850×1168　32开本　13.25印张　343千字
2000年7月第1版　2000年7月第1次印刷
定　　价:22.00元

内 容 提 要

本书作为理科硕士研究生课程系列教材，着重介绍在物理学中广泛遇到的非线性方程（包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程）的求解（解析解）和求解方法。

非线性方程的求解内容丰富，涉及到数学的许多领域，本书力求用一种相对简单的方法去说明，使读者把它作为一个应用数学的范畴去了解，以便在物理学的各个分支领域中去应用。

本书共分 10 章，供硕士研究生作为基础理论课教材使用，也可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后和科技人员阅读参考。

前言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将在几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、

基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展，使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997 年 3 月

Preface

Physics is the foundation of natural sciences,a leading disci pline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades,driving by the demands of developing technology,the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period,all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics,related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China,we decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series,as a consequence,provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics,relat ed areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate physics written by experienced teachers in Peking University in

past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of

"*The Series of Advanced Physics of Peking University*"

March 1997

序

世纪之交的物理学

20世纪即将过去。物理学的革命，这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革，以及这些变革对人类社会的影响，将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册。这段令人神往的历史，给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢？

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学，总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的。1803年道尔顿提出了近代的原子论，认为世间万物都是由几十种不同种类的原子（那时只认识到三十来种）组成的。经过近一个世纪多方面的研究和争论，科学界接受了和发展了这个学说。到19世纪60年代，元素的数目增到六十多种，而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的，门捷列夫的周期律描述了这种联系。19世纪末，物理学家们发现了电子、α粒子、放射性、X射线……发现原子是可以改变的，原子不是物质构成的最小单元。20世纪初卢瑟福建立了原子结构的"行星"模型。探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾，导致了量子力学的诞生，产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性。在这个世纪之交，物理学又正在进入一个新的层次。本世纪50年代，人们找到作为

构成物质的基石的基本粒子有三十来种，也认识到它们之间的相互作用和相互转化。探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力，近三十年来取得十分辉煌的成就。三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学，这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功，正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次，毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代的意义的大事。但是，大多数的物理学家都会同意，从本质上说，目前的标准模型还是一个唯象的模型。在欢呼它取得的多方面的胜利时，也要看到同时提出了一系列带本质性的问题。也许可以说，进入这个新层次将带来的最本质的新的物理，还没有来到我们中间。19世纪末的物理学家没能猜测到，进入比原子更深层次的探索，会在什么时候和在哪点上带来新的物理，20世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少！

20世纪物理学的革命，表现出人类理性思维的伟大胜利。狭义相对论，特别是广义相对论，以它深邃的思考，严整的形式和美丽的表述，震撼着一代又一代的物理学工作者的心灵。但是，爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了。感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气，这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了，并得到科学界多数人的认同。在大致一百五十多亿年前，宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率的点开始了。人们猜想，在宇宙膨胀、密度和温度降低中，到10^{-44}秒时，重力相互作用和其他相互作用分离开来；到

10^{-36}秒时，强相互作用和电弱相互作用分离；直到 10^{-10}秒时，弱相互作用才与电磁相互作用分离，世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界。到 10^{-6}秒时，夸克开始结合成强子，也许应当说，只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的。直到 10^{12}秒(也就是三万多年)后，原子才开始出现。这样一个综合了亚核子尺度(小于 10^{-14}厘米)的物理和宇观尺度(大于 10^{24}厘米)的物理的宇宙演化模型的建立，可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件，当代人还难以全部理解它的意义。这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就，在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战。如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点？什么是在这样演化中的物质和运动规律？为什么宇宙学中有那么多"巧合"？……总之，面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之谜，除了由衷的赞美和敬佩，人们不禁想起爱因斯坦的话："自然界最不可理解的就是它竟然可以理解！"

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是：物质世界是有层次的，反映物质世界的物理学规律也是有层次的。每一层次的物理都植根于更深层次的物理学。但是，每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的。在大自然千姿百态的丰富性面前，那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的。经典力学、经典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学，近年来我们还不停地学习它们新的、有深刻意义的进展。光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨

大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子。也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时，不够强调它们在物理学学科上的意义。但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要的观念，如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等，都首先来自凝聚态物理学，而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时，我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性，“只有一个物理学”！

在20世纪，物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域。物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域，一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域。边缘领域的发展，又反过来丰富、边深和支持了物理学本身的发展。量子力学和现代物理实验技术的应用，大大推进了现代化学的发展。对分子结构、性能和反应机理的研究，又丰富和推动了现代物理的进步。而且，如果没有现代化学的支撑，现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展。地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展，也将会是类似的情景。特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展。数学、物理学，特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展，都使人们相信，在复杂性（多维度，多组元，非线性，非平衡和开放的）系统的结构、性能和演化中，有一些具有普遍性的运动规律和运动模式。人们自然回想到，开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发展，本世纪统计物理和涨落理论的发展。有理由相信一门

有重要的基础科学意义的学科，复杂性物理正在形成。它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题，如必然性和随机性，无序化的倾向和有序结构的生成，不同层次的结构的自相似性等，作出有深刻物理意义的回答。也许，历史会表明，这也是人类认识史上又一个划时代的事物，同时，无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响。

物理学作为一门最基础的自然科学，它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求。但是，历史的发展将越来越有力地证明，正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益。本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命，就是最有说服力的例子。当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究。研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术，实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题，两者关系愈来愈密切，周期愈来愈短。与之相应，在现代，杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了。在世纪之交，无论是制造业还是服务业，也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门，都在呼唤着新的技术变革，而认真考察就会发现，多数这些变革都主要基于物理学近年的进展。21 世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉。

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响。20 世纪的物理学革命就更是这样。人类社会进步的一个主要动力便是科学精神，现代科学精神的典范和集中的反映就是现代物理学。我国是一个文明古国，在历

史上曾经对人类的文化和科学发展做出过光辉的贡献。但是，我国接受近代科学的时间还很短，现代科学的精神实质和思维方式扎根我国还要做艰苦的努力。有些人跟着西方一些比较浅薄的哲学流派的后面，宣扬一些贬低和反对现代科学精神的言论，甚至把当代社会中由于社会矛盾而造成的后果，都归罪到现代科学精神上。这当然是完全错误的。以现代物理学为代表的科学精神，是人类进步的一面旗帜，它将高高飘扬在未来的岁月中。

当我们站在新世纪的门槛上，回顾 20 世纪物理学的辉煌时，会更加确信，在 21 世纪物理学将会同样辉煌。那些有幸进入物理学工作者的行列的年青朋友，历史将会证明，你们的选择是完全正确的。

中国科学院院士 甘子钊

1997 年 4 月

作者前言

随着非线性科学研究的进展，非线性方程（包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程等）的求解成为广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术科学工作者研究非线性问题所不可缺少的。

本书是我们在北京大学从事非线性课程教学和科研近20年的结晶。我们希望研究生和其他读者能够比较容易地理解和掌握在物理学中广泛遇到的非线性方程的求解，并由此更深入地了解非线性方程和解的主要特征。

本书着重论述用解析的方法求解非线性方程。由于非线性方程无统一的求解方法，况且，它更多地属于应用数学的范畴，因而，我们采用了不同于一般非线性方程专著中的系统，即不从群分析或变换群的方法去论述，而是尽量用易于理解的一种变换方法去说明。而且着重从具体的非线性方程出发论述其求解方法，并从求解中去说明非线性科学中的一些概念和术语。

全书共分10章。第1章普遍地给出一些物理学中的非线性方程。第2章给出经典的一些非线性常微分方程、差分方程和函数方程的求解。第3章从物理角度去定性分析一些非线性方程，并从中说明一些非线性的概念。第4章到第10章分别介绍试探函数法、摄动法（含级数展开法）、行波解（着重介绍椭圆余弦波和孤立波解）、相似变换和自相似解、特殊变换法、散射反演法和Bäcklund变换。附录A、B和C分别列出了线性常微分方程、自治系统、椭圆积分和椭圆函数的一些必备的知识，便于读者查阅。

非线性方程的求解内容十分丰富，并饶有兴味。限于作者的水平，本书难免有许多不妥甚至错误，敬请读者给予批评和指正。

最后，作者衷心感谢高崇寿教授、郝柏林教授、郭柏林教授、周月梅编审和审稿人的热情支持和诚恳帮助，在此向他们表示感谢。

刘式适　刘式达

1999年4月12日于北京大学

目　　录

Contents

第1章 物理学中的非线性方程

在物理学的众多问题中经常会遇到大量的能反映各种因子或各种物理量之间相互制约和相互依存关系的非线性方程，一般可以称为非线性演化方程(Nonlinear evolution equations).

通常，物理学中的非线性方程包含非线性常微分方程(对未知函数及其导数都不全是线性的或一次式的常微分方程)、非线性偏微分方程(对未知函数及其偏导数都不全是线性的或一次式的偏微分方程)、非线性差分方程(又称为非线性映射或非线性迭代，它通常是非线性常微分方程或偏微分方程的离散形式，它对未知函数的 n 次迭代值都不全是线性的或一次式的)和函数方程(一个函数自身或多个函数之间满足的一个代数关系式).

自20世纪60年代开始，非线性科学飞跃发展，与此相应，物理学中的非线性方程的内容也日趋丰富. 尽管线性方程定解问题的适定性(存在性、惟一性和稳定性)在非线性方程中同样存在，但非线性方程的适定性问题要复杂得多，况且，非线性方程有许多自身的特点. 所以，本书的重点放在非线性方程的物理分析、求解和求解方法上.

本章给出在各类非线性方程中人们经常用到的而且大多能求出解析解的一些非线性方程. 由于这些方程在物理学的各个分支中都可能遇到，而且叙述和推演不尽相同，因此，对这些方程的物理背景，我们只作一些简单的说明.

1.1 非线性常微分方程

在物理学中广泛遇到的问题是非线性常微分方程，经常提到

和用到的有：

1. 经典的一阶非线性方程

这类方程包含 Riccati 方程、Bernoulli 方程、Chrystal 方程、Abel方程和椭圆方程等.

Riccati 方程的一般形式为

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0 \tag{1.1.1}$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，$y' \equiv \frac{dy}{dx}$. $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 是 x 的已知函数.

Bernoulli 方程的一般形式为

$$y' + p(x)y + q(x)y^m = 0 \tag{1.1.2}$$

其中 m 为常数且要求 $m \neq 0$ 和 $m \neq 1$.

Chrystal 方程的一般形式为

$$y'^2 + axy' + by + cx^2 = 0 \tag{1.1.3}$$

其中 a，b 和 c 是常数.

第一类 Abel 方程的一般形式为

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x)y^3 + s(x) = 0 \tag{1.1.4}$$

其中 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ 和 $s(x)$ 为 x 的已知函数.

第二类 Abel 方程的一般形式为

$$[y + s(x)]y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0 \tag{1.1.5}$$

在一阶非线性常微分方程中，还有一类椭圆方程，其一般形式为

$$y'^2 = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 \tag{1.1.6}$$

其中 a_0，a_1，a_2，a_3 和 a_4 为常数.

2. 经典的二阶非线性方程

这类方程包含 Lambert 方程、Painleve 方程和椭圆方程等.

Lambert 方程的一般形式为

$$y'' + \frac{k^2}{n}y = (1 - n)\frac{1}{y}y'^2 \quad (n \neq 0) \tag{1.1.7}$$

其中 k 和 n 为常数，$y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$.

Thomas-Fermi 方程的一般形式为

$$y'' = x^{-1/2} y^{3/2} \tag{1.1.8}$$

Painleve 在对非线性方程进行分类时，认为有 50 种不同类型的方程都可以化为形式

$$y'' = P(x,y)y'^2 + Q(x,y)y' + R(x,y) \tag{1.1.9}$$

其中 P,Q 和 R 是 y 的有理函数且关于 x 是解析的. 方程(1.1.9)称为 Painleve 方程. 在方程(1.1.9)中有 44 类方程可以化为线性方程或用椭圆函数求解(详见第 2 章). 另外六类 Painleve 方程分别写为

$$P_{\mathrm{I}}:\ y''=6y^2+x \tag{1.1.10}$$

$$P_{\mathrm{II}}:\ y''=2y^3+xy+\alpha \tag{1.1.11}$$

$$P_{\mathrm{III}}:\ y''=\frac{1}{y}y'^2-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y} \tag{1.1.12}$$

$$P_{\mathrm{IV}}:\ y''=\frac{1}{2y}y'^2+\frac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y} \tag{1.1.13}$$

$$P_{\mathrm{V}}:\ y''=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)y'^2-\frac{1}{x}y'+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma}{x}y+\frac{\delta y(y+1)}{y-1} \tag{1.1.14}$$

$$P_{\mathrm{VI}}:\ y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\frac{\beta x}{y^2}+\frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2}+\frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right] \tag{1.1.15}$$

其中 α,β,γ 和 δ 为常数. 这些方程通常不能化为简单的方程去求解，但可以应用 Painleve 所给的方法求出一些特解或渐近解(详见第 2 章)，或者定义六种 Painleve 超越函数.

椭圆方程(1.1.6)也可以表为

$$y'' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 \tag{1.1.16}$$

其中 A_0，A_1，A_2 和 A_3 为常数. 方程(1.1.16)可以视为方程(1.1.6)的两边对 x 求导并消去 y' 而得到的.

3. Logistic 方程

Logistic 方程是一个生态模式. 设 $n(t)$代表某种生物群体的数目随时间 t 的变化,它一方面取决于它自身的繁殖能力,另一方面取决于环境的影响(如食品供应的限制). 因而有下列 Logistic 方程:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = an - bn^2 \quad (a > 0, b > 0) \tag{1.1.17}$$

其中右端第一项表示生物群体的繁殖能力,第二项表示环境对生物群体数目的限制.

4. Landau 方程

Landau 方程是描写扰动振幅 $A(t)$随时间 t 变化的方程,也就是最早用来描述湍流发生的方程. 在线性条件下,扰动振幅 A 随时间无限增长,即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \sigma A \quad (\sigma > 0) \tag{1.1.18}$$

其中 σ 称为线性增长率. 实际由于非线性的作用,扰动振幅的增长受到限制,此时 Landau 假定振幅的变化为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \sigma A - \frac{1}{2} l A |A|^2 \quad (l > 0) \tag{1.1.19}$$

其中 l 称为 Landau 常数. 设 A 的复共轭为 $\bar{A}$,则 $\bar{A}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}}{\mathrm{d}t} = \sigma \bar{A} - \frac{1}{2} l \bar{A} |A|^2 \tag{1.1.20}$$

由于 $A\bar{A} = |A|^2$,则方程(1.1.19)乘以 $\bar{A}$,方程(1.1.20)乘以 A,然后相加得到

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t} = 2\sigma |A|^2 - l|A|^4 \tag{1.1.21}$$

这就是 Landau 方程.

5. Lotka-Volterra 方程

Lotka-Volterra 方程是描写两个生物群体(如兔子和狐狸)之间捕食关系的一个简单模型,也是参与催化化学反应的两种物质

浓度变化的一个简单模型. 它通常写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2 \end{cases} \tag{1.1.22}$$

其中 N_1 和 N_2 表示两种生物群体的数目或两种物质的浓度；α_1 和 α_2 分别为增长率和递减率，两者均为正的常数；β_1 和 β_2 分别表它们之间的相互作用和相互依存，两者也均为正的常数.

显然，当两种生物群体或两种物质无相互依存或相互作用时，一种生物的数目(如兔子)或一种物质的浓度将无限增加，而另一种生物的数目(如狐狸)或另一种物质的浓度将无限减小.

6. 无阻尼的单摆运动方程

设有一单摆，摆球为单位质量，摆长为 l，如图 1-1. 若摆球自下垂位置开始摆动，摆动的角度为 θ，则显然在重力作用下的单摆运动方程为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{1.1.23}$$

其中 $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 和 $\ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 分别表示角速度和角加速度，为了方便，以后也常用这类符号. 而

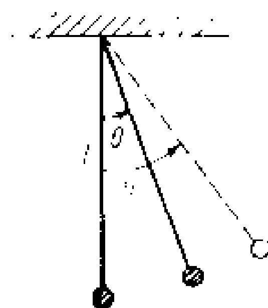


图 1-1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.1.24}$$

为圆频率，g 为重力加速度.

由方程(1.1.23)看到，它无阻尼，但有一非线性恢复力 $-\omega_0^2 \sin\theta$.

7. 有阻尼的单摆运动方程

设单摆运动受到阻尼，且阻尼力的大小与角速度成正比，这样，单摆运动方程可以写为

$$\ddot{\theta} + 2\mu\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad (1.1.25)$$

其中 $\mu>0$ 称为阻尼系数，$-2\mu\dot{\theta}$ 为阻尼力.

8. Van der Pol 方程

设质点的位移为 x，其速度和加速度分别为 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$. 若它受到一个线性恢复力 $-\omega_0^2 x$（ω_0 为线性振荡圆频率）. 同时，它也存在一个非线性阻尼力 $-2\mu\left(\dfrac{x^2}{a_c^2}-1\right)\dot{x}$，其中 $\mu>0$ 称为阻尼系数，a_c 为一正常数.

这样，表征质点运动的方程为

$$\ddot{x} + 2\mu\left(\frac{x^2}{a_c^2} - 1\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\mu > 0) \qquad (1.1.26)$$

显然，当 $|x|<a_c$ 时表征负阻尼，当 $|x|>a_c$ 时表征正阻尼. 即当位移增加时，阻尼机制的性质将由负变为正. 它在真空电子管电路振荡问题中经常出现.

9. Duffing 方程

Duffing 方程的形式为

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\beta_0^2 x^3 = A\cos\Omega t \qquad (1.1.27)$$

它除存在线性恢复力 $-\omega_0^2 x$ 和与速度成正比的阻尼力 $-2\mu\dot{x}$ 外，还有一个与位移的立方成正比的恢复力 $-\varepsilon\beta_0^2 x^3$（$\beta_0$ 为正的常数，$|\varepsilon|\ll 1$. 当 $\varepsilon>0$ 时，它表征恢复力的数值大于线性系统的恢复力，称为硬非线性；当 $\varepsilon<0$ 时，它表征恢复力的数值小于线性系统的恢复力，称为软非线性）和一个强迫振荡 $A\cos\Omega t$.（A 和 Ω 是常数）

无阻尼（$\mu=0$）和无强迫（$A=0$）的 Duffing 方程（通常描写弹性体的非线性振动）为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta_0^2 x^3 \qquad (1.1.28)$$

10. Euler 方程组

在空中自由旋转的物体，其运动由 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{m} = 0 \qquad (1.1.29)$$

所控制，其中 ω 是角速度，$\boldsymbol{m}$ 是角动量. Euler 方程(1.1.29)的分量形式为

$$\begin{cases}\dot{m}_1 = \omega_3 m_2 - \omega_2 m_3 \\ \dot{m}_2 = \omega_1 m_3 - \omega_3 m_1 \\ \dot{m}_3 = \omega_2 m_1 - \omega_1 m_2\end{cases} \tag{1.1.30}$$

因为

$$m_1 = I_1\omega_1, \quad m_2 = I_2\omega_2, \quad m_3 = I_3\omega_3 \tag{1.1.31}$$

其中 I_1,I_2 和 I_3 分别是绕 x,y 和 z 轴的惯性矩. 这样,Euler 方程(1.1.30)可改写为

$$\begin{cases}\dot{m}_1 = \gamma_1 m_2 m_3 \\ \dot{m}_2 = \gamma_2 m_3 m_1 \\ \dot{m}_3 = \gamma_3 m_1 m_2\end{cases} \tag{1.1.32}$$

它称为 Euler 方程组，其中

$$\gamma_1 = \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \tag{1.1.33}$$

若假定 $I_1 \geqslant I_2 \geqslant I_3$，则 $\gamma_1 > 0$，$\gamma_2 < 0$，$\gamma_3 > 0$.

11. Yang-Mills 方程

描写基本粒子相互作用的 Yang-Mills 方程在最简单的情况下可以写为下列耦合形式：

$$\begin{cases}\beta^2 y'' - e^2\rho^2 z^2 y = 0 \\ \beta^2 z'' - e^2\alpha^2 y^2 z = 0\end{cases} \tag{1.1.34}$$

其中 α,β,e 和 ρ 均为常数，y 和 z 为两个实的因变量.

1.2 非线性偏微分方程

物理学的众多问题中遇到的偏微分方程也很多，经常提到和用到的有：

1. Liouville 方程

最简单的二维 Liouville 方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^u \tag{1.2.1}$$

它在微分几何、量子场论等问题中经常出现.

2. Monge-Ampere 方程

在流体力学的许多问题中经常用到的 Monge-Ampere 方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D \tag{1.2.2}$$

其中 A,B,C,D 均是 $x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 的连续函数或常数.

3. 广义热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.2.3}$$

其中 κ 为导温系数,α 为常数.

4. 非线性平流方程

空间一维的非线性平流方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.2.4}$$

5. Burgers 方程

Burgers 方程是非线性的耗散(热传导、扩散和黏性)方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2.5}$$

其中 $\nu>0$ 为耗散系数.

6. KdV(Korteweg-de Vries)方程

KdV 方程是非线性的频散方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1.2.6}$$

其中 β 为频散系数.

7. KdV-Burgers 方程

KdV-Burgers 方程是既包含耗散作用又包含频散作用的非线性演化方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (1.2.7)$$

8. KdV-Burgers-Kuramoto 方程

KdV-Burgers-Kuramoto 方程,又称为 Benney 方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad (1.2.8)$$

β 为频散系数,α 和 γ 分别表耗散和不稳定作用.

9. mKdV 方程

mKdV 方程,也称为变形的 KdV 方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (\alpha,\beta = \text{常数}) \qquad (1.2.9)$$

它是用摄动法或级数展开法求解较复杂的非线性演化方程时,高阶近似所满足的方程.

10. 非线性 Klein-Gordon 方程

非线性 Klein-Gordon 方程的普遍形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V'(u) = 0 \qquad (1.2.10)$$

其中 c_0 为常数,$V(u)$ 为系统的势能,$V'(u)$ 是 $V(u)$ 对 u 的导数,它是 u 的非线性函数.

在方程(1.2.10)中,若取

$$V(u) = f_0^2(1 - \cos u) \quad (f_0 = \text{常数}) \qquad (1.2.11)$$

则它化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2\sin u = 0 \qquad (1.2.12)$$

它称为正弦-Gordon 方程,在非线性光学中有较广泛的应用.

11. Fisher 方程

Fisher 方程是非线性的反应扩散方程,其最简单的一种形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku(1-u) = 0 \quad (\nu > 0, k > 0) \tag{1.2.13}$$

其中 ν 和 k 分别称为扩散系数和反应系数.

12. Boussinesq 方程

Boussinesq 方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2.14}$$

其中 α,β 和 c_0^2 均为正的常数.

对浅水波而言,其 x 方向的速度 u 和自由面的高度 h 通常满足下列 Boussinesq 方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{1}{3} H \dfrac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u \dfrac{\partial h}{\partial x} + h \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.2.15}$$

13. 非线性 Schrödinger 方程

非线性 Schrödinger 方程,简称为 NLS 方程,又称为立方 Schrödinger 方程,它是描写非线性波的调制(即非线性波包)方程,其一般形式为

$$\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u = 0 \quad (\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}) \tag{1.2.16}$$

其中 α 和 β 分别称为频散系数和 Landau 系数.

14. Ginzburg-Landau 方程

非线性耦合系统振幅的演变通常可以化为下列 Ginzburg-Landau 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u-bu-\mathrm{i}au=0 \qquad (1.2.17)$$

其中 α 和 β 分别称为频散系数和 Landau 系数，它们通常为复数，b 为固有频率，a 为增长率.

15. BDO(Benjamin-Davis-Ono)方程

Benjamin-Davis-Ono 方程，简称 BDO 方程，有时也称为 BO 方程，它是描写深水波的频散方程，其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{H}\{u\}=0 \qquad (1.2.18)$$

其中 β 为频散系数，而

$$\mathscr{H}\{u\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x',t)}{x'-x}\mathrm{d}x' \qquad (1.2.19)$$

称为 u 的 Hilbert 变换.

16. Born-Infeld 方程

非线性的 Maxwell 方程经过简化得到下列 Born-Infeld 方程

$$\left[c_0^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$(1.2.20)$$

17. 无量纲的离子声波方程

描写离子声波的无量纲方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n}{\partial t}+\dfrac{\partial nv}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{\phi}-n\end{cases} \qquad (1.2.21)$$

其中 n，v 和 ϕ 分别为离子的数密度、运动速度和低频电势.

18. Zakharov 方程

描写等离[子]体的高频运动或非线性光波可以化为下列 Zakharov方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta \dfrac{\partial^2 |v|^2}{\partial x^2} \\ \mathrm{i} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \delta u v = 0 \end{cases} \tag{1.2.22}$$

其中 u 是离子的数密度偏差，v 为电场强度的慢变振幅，c_s 为电子-离子热运动速度，$\alpha>0$，$\beta>0$，δ 可正可负.

19. Landau-Lifshitz 方程

在不考虑耗散的条件下，Heisenberg 的自旋(spin)密度或磁化强度 $\boldsymbol{S}(u,v,w)$满足下列 Landau-Lifshitz 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \alpha \boldsymbol{S} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{S}}{\partial x^2} + \beta \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H}_0 \tag{1.2.23}$$

其中 α 和 β 为正的常数，$\boldsymbol{H}_0$ 为作用在 z 轴上的恒定外加磁场.

方程(1.2.23)的分量形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(v \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \beta H_0 v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \alpha\left(w \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \beta H_0 u \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left(u \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \end{cases} \tag{1.2.24}$$

其中 $H_0 = |\boldsymbol{H}_0|$为常数，$u^2+v^2+w^2=|\boldsymbol{S}|^2=S^2$ 也为常数.

20. 浅水方程组

描写均匀不可压缩流体(如水)运动的浅水方程组，在一维情况下可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u \dfrac{\partial h}{\partial x} + h \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.2.25}$$

其中 g 为重力加速度，u 和 h 分别为 x 方向的速度和自由面的高度.

21. KP(Kadomtsev-Petviashvili)方程

KP 方程就是二维的 KdV 方程，其一般形式为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{①} \quad (1.2.26)$$

其中 β 和 c_0 为常数.

22. 准地转位涡度方程

描写大气和海洋的大尺度运动的准地转位涡度方程是空间二维的下列非线性方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \quad (1.2.27)$$

其中水平速度(u,v)满足

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.2.28)$$

这里 ψ 为准地转流函数. 在方程(1.2.27)中,q 为准地转位涡度,在正压条件下它表为

$$q=f_0+\beta_0 y+\nabla_2^2\psi-\lambda_0^2\psi \quad (1.2.29)$$

其中 f_0,β_0 和 λ_0^2 均为常数,而

$$\nabla_2^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.2.30)$$

为二维 Laplace 算子.

1.3 非线性差分方程

差分方程是微分方程的离散形式,其自变量为 $n(n=0,1,2,\cdots)$,因变量为 $x_n(n=0,1,2,\cdots)$. x_n 的一阶导数和二阶导数分别用 $x_{n+1}-x_n$ 和 $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n$ 来表示,差分方程也称为映射.

在物理学的众多问题中遇到的非线性差分方程和非线性微分-差分方程很多,经常提到和用到的有:

---

① 有时称此方程为 KPⅡ 方程或负频散的 KP 方程. 而把左端 $\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 改为 $-\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的 KP 方程称为 KPⅠ 方程或正频散的 KP 方程.

1. Logistic 映射

Logistic 映射是一个离散的生态模式. 设 x_n 代表第 n 代某种生物群体的数目(为了方便,已用生物群体数目的最大值作为参考值无量纲化),则 Logistic 映射通常写为

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (0 \leqslant x_n \leqslant 1, 0 < \mu \leqslant 4) \tag{1.3.1}$$

其中 μ 为参数.

2. 帐篷映射

帐篷映射的一般形式为

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \left(0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ 2(1 - x_n) & \left(\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1\right) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

很容易证明: 若取 $\mu=4$,并令

$$x_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) \tag{1.3.3}$$

则关于 x_n 的 Logistic 映射就转化为关于 y_n 的帐篷映射,再将 y_n 改记为 x_n,就得到(1.3.2)式.

3. 移位映射

移位映射的一般形式为

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \left(0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ 2x_n - 1 & \left(\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1\right) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

很容易证明:若取 $\mu=4$,并令

$$x_n = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) & \left(0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} y_n\right) & \left(\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1\right) \end{cases} \tag{1.3.5}$$

则关于 x_n 的 Logistic 映射就转化为关于 y_n 的移位映射,再将 y_n 改记为 x_n,就得到(1.3.4)式.

4. 高次映射

由方程(1.3.1)所表征的 Logistic 映射又称为二次映射或抛物线映射. 类似的,可引入高次映射. 例如,三次映射、四次映射、五次映射可分别表为

$$x_{n+1} = x_n(3 - 4x_n^2) \qquad (-1 \leqslant x_n \leqslant 1) \qquad (1.3.6)$$

$$x_{n+1} = 16x_n(1 - x_n)(1 - 2x_n)^2 \qquad (0 \leqslant x_n \leqslant 1) \qquad (1.3.7)$$

$$x_{n+1} = x_n(5 - 20x_n^2 + 16x_n^4) \qquad (-1 \leqslant x_n \leqslant 1) \qquad (1.3.8)$$

5. Toda 映射

非线性晶格的运动方程是一个微分-差分方程,其形式为

$$\ddot{x}_n = F(x_{n+1} - x_n) - F(x_n - x_{n-1}) \quad (n = 1,2,\cdots,N) \qquad (1.3.9)$$

其中 x_n 为第 n 个单位质量质点的位移,F 表质点间的相互作用力. 若令相对位移为

$$r_n \equiv x_{n+1} - x_n \qquad (1.3.10)$$

则由方程(1.3.9)很容易求得

$$\ddot{r}_n = F(r_{n+1}) + F(r_{n-1}) - 2F(r_n) \qquad (1.3.11)$$

Toda 假定

$$F(r) = a(1 - e^{-br}) \quad (a > 0, b > 0) \qquad (1.3.12)$$

则方程(1.3.11)化为

$$\ddot{r}_n = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}) \qquad (1.3.13)$$

它称为 Toda 映射(map),又称 Toda 晶格(lattice)或 Toda 链(chain).

1.4 函数方程

这里所说的函数方程是指一个函数自身或多个函数之间满足的一个代数关系式. 这些函数方程的求解在非线性科学中有着广泛的应用. 函数方程通常包括:

1. Cauchy 方程

函数 $f(x)$ 的 Cauchy 方程一般有下列四种形式，即

$$u(x+y)=u(x)+u(y) \tag{1.4.1}$$

$$u(x+y)=u(x)u(y) \tag{1.4.2}$$

$$u(xy)=u(x)+u(y) \tag{1.4.3}$$

$$u(xy)=u(x)u(y) \tag{1.4.4}$$

而且，若令

$$x=\mathrm{e}^{\xi},\quad y=\mathrm{e}^{\eta},\quad u(\mathrm{e}^{\xi})=v(\xi) \tag{1.4.5}$$

则方程(1.4.3)和(1.4.4)可以分别化为

$$v(\xi+\eta)=v(\xi)+v(\eta) \tag{1.4.6}$$

$$v(\xi+\eta)=v(\xi)v(\eta) \tag{1.4.7}$$

其形式分别与方程(1.4.1)和(1.4.2)相同.

2. Pexider 方程

函数 $u(x)$，$v(x)$ 和 $w(x)$ 的 Pexider 方程是 Cauchy 方程的推广，它一般有下列四种形式：

$$u(x+y)=v(x)+w(y) \tag{1.4.8}$$

$$u(x+y)=v(x)w(y) \tag{1.4.9}$$

$$u(xy)=v(x)+w(y) \tag{1.4.10}$$

$$u(xy)=v(x)w(y) \tag{1.4.11}$$

对于方程(1.4.11)，分别令 $x=1, y=t$ 和 $x=t, y=1$ 有

$$u(t)=v(1)w(t),\quad w(t)=\frac{1}{a}u(t)\quad (a=v(1)\neq 0) \tag{1.4.12}$$

$$u(t)=v(t)w(1),\quad v(t)=\frac{1}{b}u(t)\quad (b=w(1)\neq 0) \tag{1.4.13}$$

这样，方程(1.4.11)可以改写为

$$u(xy)=\frac{1}{ab}u(x)u(y)\quad (ab\neq 0) \tag{1.4.14}$$

若令

$$u^*(x) = \frac{1}{ab}u(x) \tag{1.4.15}$$

则 $u^*(x)$ 便满足

$$u^*(xy) = u^*(x)u^*(y) \tag{1.4.16}$$

其形式与 Cauchy 的第四个方程(1.4.4)相同.

3. Euler 方程

这里说的 Euler 方程是指齐次函数方程. 对 m 次的齐次函数 $u(x,y)$,它满足

$$u(\lambda x,\lambda y) = \lambda^m u(x,y) \quad (\lambda \neq 0, x \neq 0) \tag{1.4.17}$$

这就是 m 次的齐次函数 $u(x,y)$的 Euler 方程.

(1.4.17)式两边对 λ 微商后,再令 $\lambda=1$ 就得到

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = mu \tag{1.4.18}$$

它称为 Euler 公式,是(1.4.17)式满足的微分方程.

4. 标度方程

标度方程通常有下列三种形式,即

$$u(\lambda x) = \lambda^\alpha u(x) \tag{1.4.19}$$

$$u(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y) = \lambda u(x,y) \tag{1.4.20}$$

$$u(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y) = \lambda^\gamma u(x,y) \tag{1.4.21}$$

在上述三式中,$\lambda\neq 0$,α,β,γ 为常数,都称为标度指数.

(1.4.19)式、(1.4.20)式、(1.4.21)式分别对 λ 微商后,再令 $\lambda=1$,分别得到

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \alpha u \tag{1.4.22}$$

$$\alpha x\frac{\partial u}{\partial x} + \beta y\frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{1.4.23}$$

$$\alpha x\frac{\partial u}{\partial x} + \beta y\frac{\partial u}{\partial y} = \gamma u \tag{1.4.24}$$

它们可以分别视为(1.4.19)式、(1.4.20)式和(1.4.21)式所满足的微分方程.

5. Fermi-Dirac 函数方程

此方程的形式为

$$u(x)+(1+x)u\left(\frac{y}{1+x}\right)=u(y)+(1+y)u\left(\frac{x}{1+y}\right) \tag{1.4.25}$$

习 题 1

1.1 指出下列微分方程中哪些是非线性的

(1) $y'=\frac{x}{y}\cdot\frac{1+y^2}{1+x^2}$

(2) $y'=e^{x+y}$

(3) $(x-y+1)y'+3x+y-5=0$

(4) $(x^2-1)y'=xy+x^3$

(5) $y'+\frac{1}{x}y=\sin^3 x$

(6) $y'+\frac{1}{x}y=x^2y^3$

(7) $xy'^2-2yy'+x=0$

1.2 用分离变量法求解

(1) $y'=\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$

(2) $y'=e^{x+y}$

(3) $y'=xy+x+y+1$

(4) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\mu v^2 \quad (\mu>0)$

1.3 令 $u=\frac{y}{x}$ 求解下列方程

(1) $y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)-1$

(2) $y-xe^{\frac{y}{x}}-xy'=0$

(3) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y-x}{x}$

1.4 说明下列方程的类型(Bernoulli 方程、Riccati 方程,椭圆方程)

(1) $y' + \frac{1}{x}y = xy^3$

(2) $y' = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$

(3) $y' = x^2y + x^5y^3$

(4) $y'^2 = 4y^3 + 2y^2 - 5$

(5) $x(1-x^3)y' = x^2 + y - 2xy^2$

1.5 求解形如 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0\left(M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ 的恰当方程

(1) $(3x^2 + y\cos x)\mathrm{d}x + (\sin x - 4y^3)\mathrm{d}y = 0$

(2) $(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^2)\mathrm{d}y = 0$

(3) $(a^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}x - (x+y)^2\mathrm{d}y = 0$

(4) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y - 2y)\mathrm{d}y = 0$

第 2 章　经典的非线性方程的求解

第 1 章我们给出了在物理学的众多问题中所遇到的一些非线性方程. 本章则给出其中一些相对简单和经典的非线性方程，主要是常微分方程、差分方程和函数方程的求解.

本章主要根据非线性方程的特性，利用简单变换和直接积分的方法求解.

2.1　等尺度方程和尺度不变方程

等尺度方程和尺度不变方程一般可以通过简单变换去求解.

1. 等尺度方程

所谓等尺度方程是指关于 $y(x)$ 的常微分方程在尺度变换

$$\xi = \lambda x \quad (\lambda \neq 0,\text{常数}) \tag{2.1.1}$$

下其形式保持不变. 等尺度方程可以通过变换

$$x = \mathrm{e}^t \quad \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) \tag{2.1.2}$$

化为自治方程(不明显出现自变量的方程)去求解.

例 1　方程

$$xy'' - yy' = 0 \tag{2.1.3}$$

是等尺度方程. 因为它在(2.1.1)式的变换下形式保持不变. 而且，经过(2.1.2)式的变换，方程(2.1.3)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.1.4}$$

若令

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{2.1.5}$$

则方程(2.1.4)化为

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-u-yu=0 \tag{2.1.6}$$

在 $u\neq 0$ 时($u=0$ 使得 $y=$常数),方程(2.1.6)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=1+y \tag{2.1.7}$$

这是能分离变量并可直接积分的方程,其解为

$$u=\frac{1}{2}y^2+y+C_1\quad (C_1=\text{常数}) \tag{2.1.8}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}y^2+y+C_1 \tag{2.1.9}$$

再次积分求得

$$y=2C_1\tan(C_1\ln x+C_2)-1\quad (C_2=\text{常数}) \tag{2.1.10}$$

2. 尺度不变方程

所谓尺度不变方程是指关于 $y(x)$ 的常微分方程在尺度变换

$$\xi=\lambda x,\quad z=\lambda^{\alpha}y\quad (\lambda,\alpha\neq 0,\text{常数}) \tag{2.1.11}$$

下其形式保持不变. 尺度不变方程可以通过变换

$$y=x^{\alpha}z \tag{2.1.12}$$

化为等尺度方程去求解.

例 2 在(1.1.8)式中已标记过的 Thomas-Fermi 方程

$$y''=x^{-1/2}y^{3/2} \tag{2.1.13}$$

是尺度不变方程. 因为它在 $\xi=\lambda x, z=\lambda^{-3}y$ 的变换下形式保持不变. 而且,经过变换

$$y=x^{-3}z \tag{2.1.14}$$

方程(2.1.13)化为

$$x^2z''-6xz'+12z=z^{3/2} \tag{2.1.15}$$

它是一个等尺度方程. 再经过(2.1.2)式的变换,方程(2.1.15)化为

$$\frac{d^2z}{dt^2}-7\frac{dz}{dt}+12z=z^{3/2} \qquad (2.1.16)$$

虽然这个方程很难求解析解，但可以肯定它有一个

$$z=12^2=144 \qquad (2.1.17)$$

的常数解.因而 Thomas-Fermi 方程(2.1.13)存在一个解

$$y=144x^{-3} \qquad (2.1.18)$$

它满足 Thomas-Fermi 方程(2.1.13)经常要求的在 $x\to+\infty$，$y\to 0$的边界条件.

例3 方程

$$x^2y''+3xy'+2y=x^{-4}y^{-3} \qquad (2.1.19)$$

是尺度不变方程.因为它在 $\xi=\lambda x, z=\lambda^{-1}y$ 的变换下形式保持不变.而且，经过变换

$$y=x^{-1}z \qquad (2.1.20)$$

方程(2.1.19)化为

$$x^2z''+xz'+z=z^{-3} \qquad (2.1.21)$$

它是一个等尺度方程，再经过(2.1.2)式的变换，方程(2.1.21)化为

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z=z^{-3} \qquad (2.1.22)$$

若再应用(2.1.5)式的类似变换，即令

$$u=\frac{dz}{dt},\quad \frac{du}{dt}=u\frac{du}{dz} \qquad (2.1.23)$$

则方程(2.1.22)化为

$$u\frac{du}{dz}=\frac{1-z^4}{z^3} \qquad (2.1.24)$$

这是能分离变量并可直接积分的方程，其解为

$$u^2=\frac{1}{z^2}(2C_0z^2-z^4-1)\quad (C_0=\text{常数}) \qquad (2.1.25)$$

即

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{z}\sqrt{2C_0 z^2 - z^4 - 1} \tag{2.1.26}$$

再次积分求得

$$z = [\cosh C_1 + (\sinh C_1)\sin(2\ln x + C_2)]^{1/2} \tag{2.1.27}$$

其中 $C_1 = \cosh^{-1} C_0$ 和 C_2 为二任意常数. 最后求得

$$y = \frac{1}{x}[\cosh C_1 + (\sinh C_1)\sin(2\ln x + C_2)]^{1/2} \tag{2.1.28}$$

2.2 经典的一阶非线性方程

1. Bernoulli 方程

在(1.1.2)式中已经标记过的 Bernoulli 方程为

$$y' + p(x)y + q(x)y^m = 0 \quad (m \neq 0,1) \tag{2.2.1}$$

该方程两端除以 y^m 得到

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} + q(x) = 0 \tag{2.2.2}$$

作变换

$$z = y^{1-m} \tag{2.2.3}$$

则方程(2.2.2) 化为

$$z' + (1-m)p(x)z + (1-m)q(x) = 0 \tag{2.2.4}$$

这是关于 $z(x)$的一阶线性方程,其解为

$$z = e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left\{C - \int(1-m)q(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx\right\} \tag{2.2.5}$$

其中 C 为常数. (2.2.5)式代入(2.2.3)式即求得 y.

例 1 方程

$$y' + \frac{1}{x}y - x^2y^3 = 0 \tag{2.2.6}$$

这是 $p(x)=\frac{1}{x}, q(x)=-x^2, m=3$ 的 Bernoulli 方程. 如作变换

$$z = y^{-2} \tag{2.2.7}$$

后，方程(2.2.6)化为

$$z' - \frac{2}{x}z + 2x^2 = 0 \tag{2.2.8}$$

由公式(2.2.5)解得

$$z = x^2(C - 2x) \quad (C = \text{常数}) \tag{2.2.9}$$

代入(2.2.7)式求得方程(2.2.6)的解为

$$y^2 = \frac{1}{x^2(C - 2x)} \tag{2.2.10}$$

有了 Bernoulli 方程的求解方法，很自然地想到，能否将 Bernoulli 方程推广并将它化为一阶线性方程求解呢？我们考察广义的 Bernoulli 方程

$$y' + p(x)G(y) + q(x)H(y) = 0 \tag{2.2.11}$$

其中 $G(y)$和 $H(y)$是 y 的函数. 为了求解方程(2.2.11)，我们称一阶线性方程

$$v' + p(x)v + q(x) = 0 \tag{2.2.12}$$

为非线性方程(2.2.11)的基础方程. 我们寻求方程(2.2.11)的解与基础方程(2.2.12)的解之间的联系. 设 v 与 y 存在下列函数关系：

$$v = F(y) \tag{2.2.13}$$

因为

$$v' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \cdot y' \tag{2.2.14}$$

则(2.2.13)式和(2.2.14)式代入方程(2.2.12)得到

$$y' + p(x)\left(\frac{F}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}\right) + q(x)\left(\frac{1}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}\right) = 0 \tag{2.2.15}$$

方程(2.2.15)与方程(2.2.11)比较得

$$G(y) = \frac{F}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}, \quad H(y) = \frac{1}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y} \tag{2.2.16}$$

因而

$$v = F(y) = \frac{G(y)}{H(y)} \tag{2.2.17}$$

这就是 v 与 y 的相互转换函数. 但若把(2.2.17)式的两边对 y 微商,并注意 $\frac{dv}{dy}=\frac{dF}{dy}=\frac{1}{H}$,则得

$$H\frac{d}{dy}\left(\frac{G}{H}\right)=1 \tag{2.2.18}$$

这就是解(2.2.17)存在的条件,它称为连接条件.

表面上看,对 Bernoulli 方程:$G(y)=y$,$H(y)=y^m$,$H\frac{d}{dy}\left(\frac{G}{H}\right)=y^m\frac{d}{dy}y^{1-m}=1-m\neq1$. 但若取 $G(y)=\frac{y}{1-m}$,$H(y)=\frac{1}{1-m}y^m$,则 $H\frac{d}{dy}\left(\frac{G}{H}\right)=\frac{y^m}{1-m}\frac{d}{dy}(y^{1-m})=1$,就满足连接条件了. 当然,此时的 $p(x)$ 和 $q(x)$ 也要作相应的改变. 所以,为了满足连接条件(2.2.18),常将方程(2.2.11)改写为

$$y'+p_1(x)G_1(y)+q_1(x)H_1(y)=0 \tag{2.2.19}$$

其中

$$\begin{aligned} p_1(x)&=kp(x), \quad G_1(y)=\frac{1}{k}G(y), \\ q_1(x)&=kq(x), \quad H_1(y)=\frac{1}{k}H(y) \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

其中 $k\neq1$. 对 Bernoulli 方程(2.2.1),$k=1-m$.

例 2 方程

$$y'+e^x-e^{x-y}=0 \tag{2.2.21}$$

是(2.2.11)式类型的方程. $G(y)=1$,$H(y)=e^{-y}$,且 $H\frac{d}{dy}\left(\frac{G}{H}\right)=e^{-y}\frac{d}{dy}e^y=1$. 因此,它的基础方程为

$$v'+e^xv-e^x=0 \tag{2.2.22}$$

这是能分离变量并可直接积分的方程,其解为

$$v=1+C\exp(-e^x) \quad (C=\text{常数}) \tag{2.2.23}$$

代入(2.2.17)式 $v=\frac{1}{e^{-y}}=e^y$,因而求得方程(2.2.21)的解为

$$y=\ln[1+C\exp(-e^x)] \tag{2.2.24}$$

2. Riccati 方程

在(1.1.1)式中已经标记过的 Riccati 方程为

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0 \qquad (2.2.25)$$

作变换

$$y = \frac{1}{q(x)} \cdot \frac{z'}{z} \qquad (2.2.26)$$

注意 $y' = \frac{1}{q(x)z}\left[\left(z'' - \frac{z'}{z}\right) - \frac{q'(x)}{q(x)}z\right]$,则 Riccati 方程(2.2.25)化为

$$z'' + \left(p - \frac{q'}{q}\right)z' + qrz = 0 \qquad (2.2.27)$$

这是关于 z 的二阶线性齐次方程,设它的通解为

$$z = C_1z_1 + C_2z_2 \quad (C_1, C_2 = \text{常数}) \qquad (2.2.28)$$

其中 z_1 和 z_2 是方程(2.2.27)的两个线性无关的解.

这样,便求得 Riccati 方程(2.2.25)的解为

$$y = \frac{1}{q} \cdot \frac{C_1z_1' + C_2z_2'}{C_1z_1 + C_2z_2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2} \quad (C = C_2/C_1) \qquad (2.2.29)$$

对于 Riccati 方程(2.2.25),若已知它的一个非零特解为 y_1,则可令

$$y = y_1 + u \qquad (2.2.30)$$

则 u 满足

$$u' + (p + 2qy_1)u + qu^2 = 0 \qquad (2.2.31)$$

这是 $m=2$ 的关于 u 的 Bernoulli 方程.

还需注意的是:当 $r(x)=0$ 时,Riccati 方程(2.2.25)就化为 $m=2$ 的 Bernoulli 方程.

例 3 方程

$$y' - y^2 = x \qquad (2.2.32)$$

这是 $p(x)=0, q(x)=-1, r(x)=-x$ 的 Riccati 方程.通过变换

$$y = -\frac{z'}{z} = -(\ln z)' \tag{2.2.33}$$

方程(2.2.32)化为

$$z'' + xz = 0 \tag{2.2.34}$$

这是 $z(-x)$满足的 Airy 方程,其通解为

$$z = C_1 A_i(-x) + C_2 B_i(-x) \tag{2.2.35}$$

其中 $A_i(x)$和 $B_i(x)$为第一类和第二类 Airy 函数.

(2.2.35)式代入(2.2.33)式求得方程(2.2.32)的通解为

$$y = \frac{A_i'(-x) + CB_i'(-x)}{A_i(-x) + CB_i(-x)} \quad (C = C_2/C_1) \tag{2.2.36}$$

根据 Airy 函数的性质.在 $x \to +\infty$时,(2.2.35)式可近似表为

$$z = ax^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \tag{2.2.37}$$

其中 a 为常数.

(2.2.37)式代入(2.2.33)式可以求得 $x \to +\infty$时,方程(2.2.32)的渐近解为

$$y = \sqrt{x}\tan\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad (x \to +\infty) \tag{2.2.38}$$

例 4 方程

$$y' + \frac{1}{2}y^2 = 2k^2 \tag{2.2.39}$$

这是 $p(x)=0, q(x)=1/2, r(x)=-2k^2$ 的 Riccati 方程.则作变换

$$y = \frac{2}{z}z' = 2(\ln z)' \tag{2.2.40}$$

后,方程(2.2.39)化为

$$z'' - k^2 z = 0 \tag{2.2.41}$$

它有通解

$$z = A\cosh(kx - \delta) \quad (A,\delta \text{ 为常数}) \tag{2.2.42}$$

代入(2.2.40)式求得方程(2.2.39)的通解为

$$y = 2k\tanh(kx - \delta) \tag{2.2.43}$$

例 5 方程

$$y' + \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2x^2} \tag{2.2.44}$$

这是 $p(x)=0, q(x)=\frac{1}{2}, r(x)=\frac{1}{2x^2}$ 的 Riccati 方程. 不难看出，方程(2.2.44)有一特解 $y=1/x$，如令

$$y = \frac{1}{x} + u \tag{2.2.45}$$

则 u 满足

$$u' + \frac{1}{x}u + \frac{1}{2}u^2 = 0 \tag{2.2.46}$$

这是 Bernoulli 方程. 作变换

$$z = u^{-1} \tag{2.2.47}$$

后，方程(2.2.46)化为

$$z' - \frac{1}{x}z - \frac{1}{2} = 0 \tag{2.2.48}$$

由公式(2.2.5)解得

$$z = x(C + \ln x/2) \quad (C = \text{常数}) \tag{2.2.49}$$

因而

$$u = \frac{1}{x\left(C + \frac{1}{2}\ln x\right)} \tag{2.2.50}$$

代入(2.2.45)式求得方程(2.2.37)的解为

$$y = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{1}{C + \frac{1}{2}\ln x}\right\} \tag{2.2.51}$$

3. Chrystal 方程

在(1.1.3)式中已经标记过的 Chrystal 方程为

$$y'^2 + axy' + by + cx^2 = 0 \tag{2.2.52}$$

此方程可以改写为下列形式：

$$(y' + ax/2)^2 = (a^2/4 - c)x^2 - by \tag{2.2.53}$$

若 $b=0$，则上式化为

$$y' + \frac{a}{2}x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - c}\ x \tag{2.2.54}$$

这是很易求解的一阶线性方程. 若 $b\neq 0$，则令

$$y = x^2 z \tag{2.2.55}$$

使方程(2.2.53)化为

$$(xz' + 2z + a/2)^2 = a^2/4 - c - bz \tag{2.2.56}$$

再作变换

$$v^2 = \frac{a^2}{4} - c - bz \tag{2.2.57}$$

则方程(2.2.56)化为

$$xvv' + v^2 \pm \frac{b}{2}v - \frac{1}{4}(a^2 + ab - 4c) = 0 \tag{2.2.58}$$

如果 $a^2+ab-4c=0$，则上式化为

$$v' + \frac{1}{x}v \pm \frac{b}{2x} = 0 \tag{2.2.59}$$

这是可以求解的关于 v 的一阶线性方程.

例 6 方程

$$y'^2 + 2xy' - 3x^2 = 0 \tag{2.2.60}$$

这是 $a=2,b=0,c=-3$ 的 Chrystal 方程. 相应的(2.2.54)式化为

$$y' + x = \pm 2x \tag{2.2.61}$$

由此求得方程(2.2.60)的解为

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad 和 \quad y = -\frac{3}{2}x^2 \tag{2.2.62}$$

例 7 方程

$$y'^2 + xy' + 2y + \frac{3}{4}x^2 = 0 \tag{2.2.63}$$

这是 $a=1,b=2,c=\frac{3}{4}$ 的 Chrystal 方程. 因为这里 $a^2+ab-4c=0$，故作变换(2.2.55)和(2.2.57)后化为

$$v' + \frac{1}{x}v \pm \frac{1}{x} = 0 \tag{2.2.64}$$

它很易求得为

$$v = \frac{d}{x} \mp 1 \quad (d = \text{常数}) \tag{2.2.65}$$

代入(2.2.57)式求得

$$z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{x} \mp 1\right)^2 \tag{2.2.66}$$

代入(2.2.55)式最后求得

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}(d \mp x)^2 \tag{2.2.67}$$

4. 第一类 Abel 方程

在(1.1.4)式中已经标记过的第一类 Abel 方程为

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x)y^3 + s(x) = 0 \tag{2.2.68}$$

它没有固定的解法. 但对于 $p(x)=0, s(x)=0$ 的特殊情况，即方程(2.2.68)变为

$$y' + q(x)y^2 + r(x)y^3 = 0 \tag{2.2.69}$$

的情况. 如果$\left(\frac{r}{q}\right)' = aq$($a$ 为一常数)，则可令

$$y = \frac{q}{r}z \tag{2.2.70}$$

使方程(2.2.69)化为下列可分离变量的形式：

$$z' + \frac{q^2}{r}(z^3 + z^2 - az) = 0 \tag{2.2.71}$$

例 8 方程

$$y' + 2y^2 - xy^3 = 0 \tag{2.2.72}$$

是(2.2.69)式类型的第一类 Abel 方程：若令

$$y = \frac{1}{x}z \tag{2.2.73}$$

则方程(2.2.72)化为

$$xz' - z(z-1)^2 = 0 \tag{2.2.74}$$

这不但是可分离变量的方程，而且是等尺度方程．则再令

$$x = \mathrm{e}^t \quad \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.2.75}$$

后，方程(2.2.74)化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - z(z-1)^2 = 0 \tag{2.2.76}$$

此式积分求得

$$\frac{1}{1-z} + \ln\frac{z}{z-1} = \ln x + C \quad (C = 常数) \tag{2.2.77}$$

代入(2.2.73)式最后求得方程(2.2.72)的解为

$$\frac{1}{1-xy} + \ln\frac{y}{xy-1} = C \tag{2.2.78}$$

例 9 方程

$$y' = k(a-y)(b-y)^2 \quad (a,b,k\ 为常数) \tag{2.2.79}$$

这是 Abel 方程，但它可分离变量并直接积分求得

$$x = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{a-b}\frac{1}{b-y} - \frac{1}{(a-b)^2}\ln\frac{a-y}{b-y}\right] + C \quad (C = 常数) \tag{2.2.80}$$

5. 第二类 Abel 方程

在(1.1.5)式中已经标记过的第二类 Abel 方程为

$$[y + s(x)]y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0 \tag{2.2.81}$$

若作变换

$$z = \frac{1}{y + s(x)} \tag{2.2.82}$$

则它可以化为第一类 Abel 方程：

$$z' - qz + (-p + 2qs + s')z^2 + (-qs^2 + ps - r)z^3 = 0 \tag{2.2.83}$$

2.3 椭圆方程

在(1.1.6)式和(1.1.16)式中已经标记过的椭圆方程可以写为两种形式,即为

$$y'^2 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 \qquad (2.3.1)$$

或

$$y'' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 \qquad (2.3.2)$$

椭圆方程的解在近代自然科学中有着广泛的应用.椭圆函数的定义和性质详见附录 C.

1. 第一种椭圆方程

这类椭圆方程可表为

$$y'^2 = a + by^2 + cy^4 \quad (a,b,c \neq 0) \qquad (2.3.3)$$

即在方程(2.3.1)中 $a_0=a, a_1=0, a_2=b, a_3=0, a_4=c$ 的情况.将方程(2.3.3)的两边对 x 微商消去 y' 得到

$$y'' = by + 2cy^3 \qquad (2.3.4)$$

这就是方程(2.3.2)中 $A_0=0, A_1=b, A_2=0, A_3=2c$ 的情况.

根据椭圆函数的性质可以求出下列各种椭圆方程的 Jacobi 椭圆函数解.

(1) $a=1, b=-(1+k^2), c=k^2$,即是方程

$$y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \qquad (2.3.5)$$

或是方程

$$y'' = -(1+k^2)y + 2k^2y^3 \qquad (2.3.6)$$

它们的解为 Jacobi 椭圆正弦函数:

$$y = \mathrm{sn}(x,k) \qquad (2.3.7)$$

(2) $a=k'^2 \equiv 1-k^2, b=2k^2-1, c=-k^2$,即是方程

$$y'^2 = (1-y^2)(k'^2+k^2y^2) \qquad (2.3.8)$$

或是方程

$$y'' = (2k^2-1)y - 2k^2y^3 \qquad (2.3.9)$$

它们的解为 Jacobi 椭圆余弦函数：

$$y = \mathrm{cn}(x,k) \tag{2.3.10}$$

(3) $a=-k'^2\equiv-(1-k^2)$，$b=2-k^2$，$c=-1$，即是方程

$$y'^2 = (1-y^2)(y^2-k'^2) \tag{2.3.11}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y-2y^3 \tag{2.3.12}$$

它们的解为第三种 Jacobi 椭圆正弦函数：

$$y = \mathrm{dn}(x,k) \tag{2.3.13}$$

(4) $a=k^2$，$b=-(1+k^2)$，$c=1$，即是方程

$$y'^2 = (y^2-1)(y^2-k^2) \tag{2.3.14}$$

或是方程

$$y'' = -(1+k^2)y+2y^3 \tag{2.3.15}$$

它们的解为

$$y = \mathrm{ns}(x,k) \equiv \frac{1}{\mathrm{sn}(x,k)} \tag{2.3.16}$$

(5) $a=-k^2$，$b=2k^2-1$，$c=k'^2\equiv1-k^2$，即是方程

$$y'^2 = (y^2-1)(k^2+k'^2y^2) \tag{2.3.17}$$

或是方程

$$y'' = (2k^2-1)y+2k'^2y^3 \tag{2.3.18}$$

它们的解为

$$y = \mathrm{nc}(x,k) \equiv \frac{1}{\mathrm{cn}(x,k)} \tag{2.3.19}$$

(6) $a=-1$，$b=2-k^2$，$c=-k'^2\equiv-(1-k^2)$，即是方程

$$y'^2 = (y^2-1)(1-k'^2y^2) \tag{2.3.20}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y-2k'^2y^3 \tag{2.3.21}$$

它们的解为

$$y = \mathrm{nd}(x,k) \equiv \frac{1}{\mathrm{dn}(x,k)} \tag{2.3.22}$$

(7) $a=1, b=2-k^2, c=k'^2\equiv 1-k^2$，即是方程

$$y'^2 = (1+y^2)(1+k'^2y^2) \qquad (2.3.23)$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y + 2k'^2y^3 \qquad (2.3.24)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{sc}(x,k) \equiv \frac{\mathrm{sn}(x,k)}{\mathrm{cn}(x,k)} \qquad (2.3.25)$$

(8) $a=1, b=2k^2-1, c=-k^2k'^2$，即是方程

$$y'^2 = (1+k^2y^2)(1-k'^2y^2) \qquad (2.3.26)$$

或是方程

$$y'' = (2k^2-1)y - 2k^2k'^2y^3 \qquad (2.3.27)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{sd}(x,k) \equiv \frac{\mathrm{sn}(x,k)}{\mathrm{dn}(x,k)} \qquad (2.3.28)$$

(9) $a=k'^2\equiv 1-k^2, b=2-k^2, c=1$，即是方程

$$y'^2 = (1+y^2)(k'^2+y^2) \qquad (2.3.29)$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y + 2y^3 \qquad (2.3.30)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{cs}(x,k) \equiv \frac{\mathrm{cn}(x,k)}{\mathrm{sn}(x,k)} \qquad (2.3.31)$$

(10) $a=1, b=-(1+k^2), c=k^2$，即是方程

$$y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \qquad (2.3.32)$$

或是方程

$$y'' = -(1+k^2)y + 2k^2y^3 \qquad (2.3.33)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{cd}(x,k) \equiv \frac{\mathrm{cn}(x,k)}{\mathrm{dn}(x,k)} \qquad (2.3.34)$$

注意，方程(2.3.32)形式同方程(2.3.5)，方程(2.3.33)形式同方程(2.3.36).

(11) $a=-k^2k'^2=-k^2(1-k^2)$, $b=2k^2-1$, $c=1$,即是方程

$$y'^2=(y^2+k^2)(y^2-k'^2) \tag{2.3.35}$$

或是方程

$$y''=(2k^2-1)y+2y^3 \tag{2.3.36}$$

它们的解为

$$y=\mathrm{ds}(x,k)\equiv\frac{\mathrm{dn}(x,k)}{\mathrm{sn}(x,k)} \tag{2.3.37}$$

(12) $a=k^2$, $b=-(1+k^2)$, $c=1$,即是方程

$$y'^2=(y^2-1)(y^2-k^2) \tag{2.3.38}$$

或是方程

$$y''=-(1+k^2)y+2y^3 \tag{2.3.39}$$

它们的解为

$$y=\mathrm{dc}(x,k)\equiv\frac{\mathrm{dn}(x,k)}{\mathrm{cn}(x,k)} \tag{2.3.40}$$

注意,方程(2.3.38)形式同方程(2.3.14),方程(2.3.39)形式同方程(2.3.15).

把以上12个解乘以常数 A,就可以获得另外12个方程和相应的解.

(13) $a=A^2$, $b=-(1+k^2)$, $c=k^2/A^2$,即是方程

$$y'^2=(A^2-y^2)(A^2-k^2y^2)/A^2 \tag{2.3.41}$$

或是方程

$$y''=-(1+k^2)y+2\frac{k^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.42}$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{sn}(x,k) \tag{2.3.43}$$

(14) $a=A^2k'^2=A^2(1-k^2)$, $b=2k^2-1$, $c=-k^2/A^2$,即是方程

$$y'^2=(A^2-y^2)(k'^2A^2+k^2y^2)/A^2 \tag{2.3.44}$$

或是方程

$$y''=(2k^2-1)y-2\frac{k^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.45}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cn}(x,k) \tag{2.3.46}$$

(15) $a=-A^2k'^2=-A^2(1-k^2)$, $b=2-k^2$, $c=-1/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (A^2 - y^2)(y^2 - k'^2A^2)/A^2 \tag{2.3.47}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y - \frac{2}{A^2}y^3 \tag{2.3.48}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{dn}(x,k) \tag{2.3.49}$$

(16) $a=k^2A^2$, $b=-(1+k^2)$, $c=1/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (y^2 - A^2)(y^2 - k^2A^2)/A^2 \tag{2.3.50}$$

或是方程

$$y'' = -(1+k^2)y + 2y^3/A^2 \tag{2.3.51}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{ns}(x,k) \tag{2.3.52}$$

(17) $a=-k^2A^2$, $b=2k^2-1$, $c=k'^2/A^2=(1-k^2)/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (y^2 - A^2)(k^2A^2 + k'^2y^2)/A^2 \tag{2.3.53}$$

或是方程

$$y'' = (2k^2-1)y + 2\frac{k'^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.54}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{nc}(x,k) \tag{2.3.55}$$

(18) $a=-A^2$, $b=2-k^2$, $c=-k'^2/A^2=-(1-k^2)/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (y^2 - A^2)(A^2 - k'^2y^2)/A^2 \tag{2.3.56}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y - 2\frac{k'^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.57}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{nd}(x,k) \tag{2.3.58}$$

(19) $a=A^2, b=2-k^2, c=k'^2/A^2=(1-k^2)/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (A^2 + y^2)(A^2 + k'^2y^2)/A^2 \tag{2.3.59}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y + 2\frac{k'^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.60}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sc}(x,k) \tag{2.3.61}$$

(20) $a=A^2, b=2k^2-1, c=-k^2k'^2/A^2=-k^2(1-k^2)/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (A^2 + k^2y^2)(A^2 - k'^2y^2)/A^2 \tag{2.3.62}$$

或是方程

$$y'' = (2k^2-1)y - 2\frac{k^2k'^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.63}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sd}(x,k) \tag{2.3.64}$$

(21) $a=A^2k'^2=A^2(1-k^2), b=2-k^2, c=1/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (A^2 + y^2)(k'^2A^2 + y^2)/A^2 \tag{2.3.65}$$

或是方程

$$y'' = (2-k^2)y + \frac{2}{A^2}y^3 \tag{2.3.66}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cs}(x,k) \tag{2.3.67}$$

(22) $a=A^2, b=-(1+k^2), c=k^2/A^2$，即是方程

$$y'^2 = (A^2 - y^2)(A^2 - k^2y^2)/A^2 \tag{2.3.68}$$

或是方程

$$y'' = -(1+k^2)y + 2\frac{k^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.69}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cd}(x,k) \tag{2.3.70}$$

注意,方程(2.3.68)形式同方程(2.3.41),方程(2.3.69)形式同方程(2.3.42).

(23) $a=-k^2k'^2A^2=-k^2(1-k^2)A^2, b=2k^2-1, c=1/A^2$,即是方程

$$y'^2=(y^2+k^2A^2)(y^2-k'^2A^2)/A^2 \qquad (2.3.71)$$

或是方程

$$y''=(2k^2-1)y+\frac{2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.72)$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{ds}(x,k) \qquad (2.3.73)$$

(24) $a=k^2A^2, b=-(1+k^2), c=1/A^2$,即是方程

$$y'^2=(y^2-A^2)(y^2-k^2A^2)/A^2 \qquad (2.3.74)$$

或是方程

$$y''=-(1+k^2)y+\frac{2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.75)$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{dc}(x,k) \qquad (2.3.76)$$

注意,方程(2.3.74)形式同方程(2.3.50),方程(2.3.75)同方程(2.3.51).

例 1 第一种非线性无质量的 Dirac 方程的最简形式为

$$y''+\lambda y^3=0 \quad (\lambda>0) \qquad (2.3.77)$$

将它与方程(2.3.45)比较后知:$k=\frac{1}{\sqrt{2}}, A=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,因而方程(2.3.77)有解

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{cn}\left(x-x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.3.78)$$

其中 x_0 为积分常数.

例 2 第二种非线性无质量的 Dirac 方程的最简形式为

$$y''-\lambda y^3=0 \quad (\lambda>0) \qquad (2.3.79)$$

显然，它有一幂函数解

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cdot\frac{1}{x} \tag{2.3.80}$$

同时，它与方程(2.3.54)比较知：$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$A=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$，因而方程(2.3.79)还有一个解为

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mathrm{nc}\left(x-x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.3.81}$$

例 3 Yang-Mills 方程(1.1.34)在 $\beta^2=1$ 和 $\alpha^2=\rho^2=-1$ 的情况下化为

$$\begin{cases}y''+e^2z^2y=0\\ z''+e^2y^2z=0\end{cases} \tag{2.3.82}$$

若取 $y=z$，并注意 $e^2>0$，则每个方程的形式都同方程(2.3.77)，只是 $\lambda=e^2$，因而有

$$y=z=\pm\frac{1}{e}\,\mathrm{cn}\left(x-x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{①} \tag{2.3.83}$$

例 4 Yang-Mills 方程(1.1.34)在 $\alpha^2=\beta^2=\rho^2=-1$ 的情况下化为

$$\begin{cases}y''-e^2z^2y=0\\ z''-e^2y^2z=0\end{cases} \tag{2.3.84}$$

若取 $y=z$，并注意 $e^2>0$，则每个方程的形式都同方程(2.3.79)，只是 $\lambda=e^2$，因而有两个解

$$y=z=\pm\frac{\sqrt{2}}{e}\cdot\frac{1}{x}^{①} \tag{2.3.85}$$

$$y=z=\pm\frac{1}{e}\,\mathrm{nc}\left(x-x_0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{①} \tag{2.3.86}$$

---

① 通常，称 Yang-Mille 方程在时间-空间上的局部解为瞬子(instanton)，并用它说明基本粒子不同状态间的转换.

如果把以上 12 个解中的自变量换为 μx（μ 为常数），则又可以获得另外 12 个方程和相应的解.

(25) $a=\mu^2 A^2, b=-\mu^2(1+k^2), c=\dfrac{\mu^2 k^2}{A^2}$，即是方程

$$y'^2=\frac{\mu^2}{A^2}(A^2-y^2)(A^2-k^2y^2) \tag{2.3.87}$$

或是方程

$$y''=-\mu^2(1+k^2)y+\frac{2\mu^2k^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.88}$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{sn}(\mu x,k) \tag{2.3.89}$$

(26) $a=\mu^2 A^2 k'^2, b=\mu^2(2k^2-1), c=-\mu^2 k^2/A^2$，即是方程

$$y'^2=\frac{\mu^2}{A^2}(A^2-y^2)(k'^2A^2+k^2y^2) \tag{2.3.90}$$

或是方程

$$y''=\mu^2(2k-1)y-\frac{2\mu^2k^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.91}$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{cn}(\mu x,k) \tag{2.3.92}$$

(27) $a=-\mu^2 A^2 k'^2, b=\mu^2(2-k^2), c=-\mu^2/A^2$，即是方程

$$y'^2=\frac{\mu^2}{A^2}(A^2-y^2)(y^2-k'^2A^2) \tag{2.3.93}$$

或是方程

$$y''=\mu^2(2-k^2)y-\frac{2\mu^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.94}$$

它们的解为

$$y=A\mathrm{dn}(\mu x,k) \tag{2.3.95}$$

(28) $a=\mu^2 k^2 A^2, b=-\mu^2(1+k^2), c=\mu^2/A^2$，即是方程

$$y'^2=\frac{\mu^2}{A^2}(y^2-A^2)(y^2-k^2A^2) \tag{2.3.96}$$

或是方程

$$y'' = -\mu^2(1+k^2)y + \frac{2\mu^2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.97)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{ns}(\mu x, k) \qquad (2.3.98)$$

(29) $a=-\mu^2k^2A^2, b=\mu^2(2k^2-1), c=\mu^2k'^2/A^2$，即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(y^2 - A^2)(k^2A^2 + k'^2y^2) \qquad (2.3.99)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2k^2-1)y + \frac{2\mu^2k'^2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.100)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{nc}(\mu x, k) \qquad (2.3.101)$$

(30) $a=-\mu^2A^2, b=\mu^2(2-k^2), c=-\mu^2k'^2/A^2$，即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(y^2 - A^2)(A^2 - k'^2y^2) \qquad (2.3.102)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2-k^2)y - \frac{2\mu^2k'^2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.103)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{nd}(\mu x, k) \qquad (2.3.104)$$

(31) $a=\mu^2A^2, b=\mu^2(2-k^2), c=\mu^2k'^2/A^2$，即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(A^2 + y^2)(A^2 + k'^2y^2) \qquad (2.3.105)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2-k^2)y + \frac{2\mu^2k'^2}{A^2}y^3 \qquad (2.3.106)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sc}(\mu x, k) \qquad (2.3.107)$$

(32) $a=\mu^2A^2, b=\mu^2(2k^2-1), c=-\mu^2k^2k'^2/A^2$，即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(A^2 + k^2y^2)(A^2 - k'^2y^2) \qquad (2.3.108)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2k^2 - 1)y - \frac{2\mu^2 k^2 k'^2}{A^2} y^3 \qquad (2.3.109)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sd}(\mu x, k) \qquad (2.3.110)$$

(33) $a = \mu^2 A^2 k'^2, b = \mu^2(2 - k^2), c = \mu^2/A^2$,即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(A^2 + y^2)(k'^2 A^2 + y^2) \qquad (2.3.111)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2 - k^2)y + \frac{2\mu^2}{A^2} y^3 \qquad (2.3.112)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cs}(\mu x, k) \qquad (2.3.113)$$

(34) $a = \mu^2 A^2, b = -\mu^2(1 + k^2), c = \mu^2 k^2/A^2$,即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(A^2 - y^2)(A^2 - k^2 y^2) \qquad (2.3.114)$$

或是方程

$$y'' = -\mu^2(1 + k^2)y + \frac{2\mu^2 k^2}{A^2} y^3 \qquad (2.3.115)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cd}(\mu x, k) \qquad (2.3.116)$$

(35) $a = -\mu^2 k^2 k'^2 A^2, b = \mu^2(2k^2 - 1), c = \mu^2/A^2$,即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(y^2 + k^2 A^2)(y^2 - k'^2 A^2) \qquad (2.3.117)$$

或是方程

$$y'' = \mu^2(2k^2 - 1)y + \frac{2\mu^2}{A^2} y^3 \qquad (2.3.118)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{ds}(\mu x, k) \qquad (2.3.119)$$

(36) $a = \mu^2 k^2 A^2, b = -\mu^2(1 + k^2), c = \mu^2/A^2$,即是方程

$$y'^2 = \frac{\mu^2}{A^2}(y^2 - A^2)(y^2 - k^2 A^2) \qquad (2.3.120)$$

或是方程

$$y'' = -\mu^2(1+k^2)y + \frac{2\mu^2}{A^2}y^3 \tag{2.3.121}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{dc}(\mu x, k) \tag{2.3.122}$$

例 5 第一种非线性有质量的 Dirac 方程的最简形式为

$$y'' - m^2 y + \lambda y^3 = 0 \quad (\lambda > 0, m > 0) \tag{2.3.123}$$

与方程(2.3.94)比较知：$\mu^2 = \frac{m^2}{2-k^2}$，$A = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mu$，因此，方程(2.3.123)的解为

$$y = \pm m \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda(2-k^2)}}\,\mathrm{dn}\left[\frac{m}{\sqrt{2-k^2}}(x-x_0), k\right] \tag{2.3.124}$$

k 由振幅确定，当 $k=0$ 和 $k=1$ 时，上式分别退化为

$$y = \pm m/\sqrt{\lambda} \quad (k=0) \tag{2.3.125}$$

$$y = \pm m \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,\mathrm{sech}\, m(x-x_0) \quad (k=1) \tag{2.3.126}$$

例 6 第二种非线性有质量的 Dirac 方程的最简形式为

$$y'' - m^2 y - \lambda y^3 = 0 \quad (\lambda > 0, m > 0) \tag{2.3.127}$$

与方程(2.3.112)比较知：$\mu^2 = \frac{m^2}{2-k^2}$，$A = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mu$，因此，方程(2.3.127)的解为

$$y = \pm m \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda(2-k^2)}}\,\mathrm{cs}\left[\frac{m}{\sqrt{2-k^2}}(x-x_0), k\right] \tag{2.3.128}$$

k 由振幅确定，当 $k=0$ 和 $k=1$ 时，上式分别退化为

$$y = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\cot\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0) \quad (k=0) \tag{2.3.129}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,m\cdot\operatorname{csch} m(x-x_0)\quad(k=1)\tag{2.3.130}$$

例 7 第三种非线性有质量的 Dirac 方程的最简形式为

$$y''+m^2y-\lambda y^3=0\quad(\lambda>0,m>0)\tag{2.3.131}$$

与方程(2.3.88)比较知：$\mu^2=\frac{m^2}{1+k^2}, A=\pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mu k$，因此，方程(2.3.131)的解为

$$y=\pm mk\cdot\sqrt{\frac{2}{\lambda(1+k^2)}}\operatorname{sn}\left[\frac{m}{\sqrt{1+k^2}}(x-x_0),k\right]\tag{2.3.132}$$

k 由振幅确定，当 $k=0$ 和 $k=1$ 时，上式分别退化为

$$y=0\quad(k=0)\tag{2.3.133}$$

$$y=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right]\quad(k=1)\tag{2.3.134}$$

例 8 非线性 Rossby 波的振幅 a 随时间 t 缓变满足方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{N_0}{2}(a_{\max}^2-a^2)(a^2-a_{\min}^2)\quad(N_0>0)\tag{2.3.135}$$

与方程(2.3.93)比较知：$A=a_{\max}, k'^2=\left(\frac{a_{\min}}{a_{\max}}\right)^2, \mu^2=\frac{N_0}{2}A^2$，因此，方程(2.3.135)的解为

$$a=a_{\max}\operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{N_0}{2}}a_{\max}t,k\right)\tag{2.3.136}$$

其中 k 满足

$$k^2\equiv1-k'^2=1-\left(\frac{a_{\min}}{a_{\max}}\right)^2\tag{2.3.137}$$

2. 第二种椭圆方程

这类椭圆方程可表为

$$y'^2=ay+by^2+cy^3\quad(a,b,c\neq0)\tag{2.3.138}$$

即在方程(2.3.1)中 $a_0=0, a_1=a, a_2=b, a_3=c, a_4=0$ 的情况. 将方程(2.3.138)的两边对 x 微商消去 y' 得到

$$y'' = \frac{a}{2} + by + \frac{3c}{2}y^2 \qquad (2.3.139)$$

这就是方程(2.3.2)中 $A_0=\frac{a}{2}, A_1=b, A_2=\frac{3c}{2}, A_3=0$ 的情况.

根据椭圆函数的性质可以求出下列椭圆方程的 Jacobi 椭圆函数解.

(1) $a=4, b=-4(1+k^2), c=4k^2$, 即是方程

$$y'^2 = 4y(1-y)(1-k^2y) \qquad (2.3.140)$$

或是方程

$$y'' = 2\{1-2(1+k^2)y+3k^2y^2\} \qquad (2.3.141)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{sn}^2(x,k) \qquad (2.3.142)$$

(2) $a=4k'^2, b=4(2k^2-1), c=-4k^2$, 即是方程

$$y'^2 = 4y(1-y)(k'^2+k^2y) \qquad (2.3.143)$$

或是方程

$$y'' = 2\{k'^2+2(2k^2-1)y-3k^2y^2\} \qquad (2.3.144)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{cn}^2(x,k) \qquad (2.3.145)$$

(3) $a=-4k'^2, b=4(2-k^2), c=-4$, 即是方程

$$y'^2 = 4y(1-y)(y-k'^2) \qquad (2.3.146)$$

或是方程

$$y'' = 2\{-k'^2+2(2-k^2)y-3y^2\} \qquad (2.3.147)$$

它们的解为

$$y = \mathrm{dn}^2(x,k) \qquad (2.3.148)$$

(4) $a=4A, b=-4(1+k^2), c=4k^2/A$, 即是方程

$$y'^2 = \frac{4}{A}y(A-y)(A-k^2y) \qquad (2.3.149)$$

或是方程

$$y'' = 2\left\{A - 2(1 + k^2)y + \frac{3k^2}{A}y^2\right\} \tag{2.3.150}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sn}^2(x,k) \tag{2.3.151}$$

(5) $a=4Ak'^2, b=4(2k^2-1), c=-4k^2/A$，即是方程

$$y'^2 = \frac{4}{A}y(A-y)(Ak'^2+k^2y) \tag{2.3.152}$$

或是方程

$$y'' = 2\left\{Ak'^2 + 2(2k^2-1)y - \frac{3k^2}{A}y^2\right\} \tag{2.3.153}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cn}^2(x,k) \tag{2.3.154}$$

(6) $a=-4Ak'^2, b=4(2-k^2), c=-4/A$，即是方程

$$y'^2 = \frac{4}{A}y(A-y)(y-Ak'^2) \tag{2.3.155}$$

或是方程

$$y'' = 2\left\{-Ak'^2 + 2(2-k^2)y - \frac{3}{A}y^2\right\} \tag{2.3.156}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{dn}^2(x,k) \tag{2.3.157}$$

(7) $a=4A\mu^2, b=-4\mu^2(1+k^2), c=4\mu^2k^2/A$，即是方程

$$y'^2 = \frac{4\mu^2}{A}y(A-y)(A-k^2y) \tag{2.3.158}$$

或是方程

$$y'' = 2\mu^2\left\{A - 2(1+k^2)y + \frac{3k^2}{A}y^2\right\} \tag{2.3.159}$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{sn}^2(\mu x,k) \tag{2.3.160}$$

(8) $a=4Ak'^2\mu^2, b=4\mu^2(2k^2-1), c=-4k^2\mu^2/A$，即是方程

$$y'^2 = \frac{4\mu^2}{A}y(A-y)(Ak'^2+k^2y) \tag{2.3.161}$$

或是方程

$$y'' = 2\mu^2\left\{Ak'^2 + 2(2k^2 - 1)y - \frac{3k^2}{A}y^2\right\} \quad (2.3.162)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{cn}^2(\mu x, k) \quad (2.3.163)$$

(9) $a=-4Ak'^2\mu^2$, $b=4\mu^2(2-k^2)$, $c=-4\mu^2/A$，即是方程

$$y'^2 = \frac{4\mu^2}{A}y(A-y)(y-Ak'^2) \quad (2.3.164)$$

或是方程

$$y'' = 2\mu^2\left\{-Ak'^2 + 2(2-k^2)y - \frac{3}{A}y^2\right\} \quad (2.3.165)$$

它们的解为

$$y = A\mathrm{dn}^2(\mu x, k) \quad (2.3.166)$$

例 9 方程

$$y'^2 = \gamma y(y-\alpha)(y-\beta) \quad (\gamma > 0, \beta > \alpha > 0) \quad (2.3.167)$$

此方程可以改写为

$$y'^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha}y(\alpha - y)\left(\alpha - \frac{\alpha}{\beta}y\right) \quad (2.3.168)$$

与方程(2.3.158)比较知：$A=\alpha$, $\mu^2=\dfrac{\beta\gamma}{4}$, $k^2=\dfrac{\alpha}{\beta}$，因此，方程(2.3.167)的解为

$$y = \alpha\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2}x, k\right) \quad \left[k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right] \quad (2.3.169)$$

例 10 方程

$$y'^2 = -\gamma y(y-\alpha)(y-\alpha+\beta) \quad (\gamma > 0, \beta > \alpha > 0) \quad (2.3.170)$$

此方程可以改写为

$$y'^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha}y(\alpha - y)\left[\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta}y\right] \quad (2.3.171)$$

与方程(2.3.161)比较知：$A=\alpha$, $\mu^2=\dfrac{\beta\gamma}{4}$, $k^2=\dfrac{\alpha}{\beta}$，因此，方程

(2.3.170)的解为

$$y = \alpha \mathrm{cn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2}x, k\right) \quad \left(k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \tag{2.3.172}$$

例 11 方程

$$y'^2 = -\gamma y(y-\beta)(y-\beta+\alpha) \quad (\gamma > 0, \beta > \alpha > 0) \tag{2.3.173}$$

此方程可以改写为

$$y'^2 = \frac{\beta\gamma}{\beta} y(\beta - y)\left[y - \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \tag{2.3.174}$$

与方程(2.3.164)比较知：$A = \beta, \mu^2 = \frac{\beta\gamma}{4}, k^2 = \frac{\alpha}{\beta}$，因此，方程(2.3.173)的解为

$$y = \beta \mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2}x, k\right) \quad \left(k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \tag{2.3.175}$$

3. 第三种椭圆方程

这类椭圆方程可表为

$$y'^2 = a + by + cy^2 + dy^3 \quad (a, b, d \neq 0) \tag{2.3.176}$$

即在方程(2.3.1)中 $a_0 = a, a_1 = b, a_2 = c, a_3 = d$ 的情况. 将方程(2.3.176)的两边对 x 微商消去 y' 得到

$$y'' = \frac{b}{2} + cy + \frac{3d}{2}y^2 \tag{2.3.177}$$

下面给出常用的两个方程的解.

(1) $a = -Ay_1y_2y_3, b = A(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1), c = -A(y_1 + y_2 + y_3), d = A (A > 0)$，即是方程

$$y'^2 = A(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \quad (A > 0, y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3) \tag{2.3.178}$$

或是方程

$$y'' = \frac{A}{2}(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) - A(y_1 + y_2 + y_3)y + \frac{3A}{2}y^2 \tag{2.3.179}$$

只要把这里的 $y-y_3$ 视为 y，并令 $\alpha=y_2-y_3$，$\beta=y_1-y_3$，$k^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}$，则方程(2.3.178)就化为方程(2.3.167)。因此，方程(2.3.178)的解为

$$y=y_3+(y_2-y_3)\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1-y_3)}\,x,k\right]$$

$$=y_2-(y_2-y_3)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1-y_3)}\,x,k\right]\quad(y_3\leqslant y\leqslant y_2)$$

(2.3.180)

其中

$$k=\sqrt{\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}}\tag{2.3.181}$$

为模数. 当 $y_1=y_2$ 时，$k=1$，则解(2.3.180)化为

$$y=y_1-(y_1-y_3)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{A}{4}(y_1-y_3)}\,x\tag{2.3.182}$$

(2) $a=Ay_1y_2y_3$，$b=-A(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)$，$c=A(y_1+y_2+y_3)$，$d=-A(A>0)$，即是方程

$$y'^2=-A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\quad(A>0,y_1\geqslant y_2\geqslant y_3)$$

(2.3.183)

或是方程

$$y''=-\frac{A}{2}(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)+A(y_1+y_2+y_3)-\frac{3A}{2}y^2$$

(2.3.184)

只要把这里的 $y-y_2$ 视为 y，并令 $\alpha=y_1-y_2$，$\beta=y_1-y_3$，$k^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}$，则方程(2.3.183)就化为方程(2.3.170)。因此，方程(2.3.183)的解为

$$y = y_2 + (y_1 - y_2)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1 - y_3)}x, k\right] \quad (y_2 \leqslant y \leqslant y_1)$$

$$(2.3.185)$$

其中

$$k = \sqrt{\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}} \tag{2.3.186}$$

当 $y_2 = y_3$ 时，$k=1$，则解(2.3.185)化为

$$y = y_2 + (y_1 - y_2)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{A}{4}(y_1 - y_2)}x \tag{2.3.187}$$

需要指出的是：在这种类型的椭圆方程(2.3.176)中，若 $a = -g_3, b = -g_2, c = 0, d = 4$，则它化为

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \quad (g_2, g_3 \text{ 为常数}) \tag{2.3.188}$$

这是 Weierstrass 椭圆函数 $y = p(x; g_2, g_3)$（见附录 C）所满足的微分方程.(2.3.188)式还可以改写为

$$y'' = 6y^2 - \frac{g_2}{2} \tag{2.3.189}$$

因此，方程(2.3.188)或(2.3.189)的解为

$$y = p(x; g_2, g_3) \tag{2.3.190}$$

例 12 方程

$$y'' = 6y^2 - \frac{3}{2}a^2 \quad (a > 0, \text{常数}) \tag{2.3.191}$$

这是方程(2.3.189)中 $g_2 = 3a^2$ 的情况，尽管它可以用 Weierstrass 椭圆函数求解. 但若作变换

$$\xi = \sqrt{\frac{3a}{2}}x, \quad y = a\left(1 + \frac{3}{2}z\right) \tag{2.3.192}$$

方程(2.3.191)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} = 2(1 + 4z + 3z^2) \tag{2.3.193}$$

它有一个解为

$$z = \tan^2(\xi - \xi_0) \tag{2.3.194}$$

因此,方程(2.3.191)有一个解

$$y = a + \frac{3a}{2}\tan^2\left[\sqrt{\frac{3a}{2}}(x - x_0)\right] \tag{2.3.195}$$

其中 x_0 为积分常数.

4. 第四种椭圆方程

这类椭圆方程是方程(2.3.1)中 $a_0=0$ 或 $a_4=0$ 且可以直接积分的情况. 如

(1) 方程

$$y'^2 = y^2(a_2 + a_3 y) \quad 或 \quad y'' = a_2 y + \frac{3}{2}a_3 y^2 \tag{2.3.196}$$

直接积分上式,得到

$$y = \begin{cases} -\dfrac{a_2}{a_3}\operatorname{sech}^2\left[\dfrac{\sqrt{a_2}}{2}(x - x_0)\right] & (a_2 > 0, a_3 y < 0) \\ \dfrac{a_2}{a_3}\operatorname{csch}^2\left[\dfrac{\sqrt{a_2}}{2}(x - x_0)\right] & (a_2 > 0, a_3 y > 0) \\ -\dfrac{a_2}{a_3}\sec^2\left[\dfrac{\sqrt{-a_2}}{2}(x - x_0)\right] & (a_2 < 0) \end{cases} \tag{2.3.197}$$

其中 x_0 为积分常数.

(2) 方程

$$y'^2 = y^2(a_2 + a_4 y^2) \quad 或 \quad y'' = a_2 y + 2a_4 y^3 \tag{2.3.198}$$

直接积分上式,得到

$$y = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{a_2}{a_4}}\operatorname{csch}\left[\sqrt{a_2}(x - x_0)\right] & (a_2 > 0, a_4 > 0) \\ \pm\sqrt{-\dfrac{a_2}{a_4}}\operatorname{sech}\left[\sqrt{a_2}(x - x_0)\right] & (a_2 > 0, a_4 < 0) \\ \pm\sqrt{-\dfrac{a_2}{a_4}}\csc\left[\sqrt{-a_2}(x - x_0)\right] & (a_2 < 0, a_4 > 0) \end{cases} \tag{2.3.199}$$

其中 x_0 为积分常数.

(3) 方程

$$y'^2 = y^2(a_2 + a_3 y + a_4 y^2)$$

或

$$y'' = a_2 y + \frac{3}{2} a_3 y^2 + 2a_4 y^3 \tag{2.3.200}$$

当 $a_2<0$ 和 $a_3>0, a_4>0$ 时,直接积分得到

$$y=\begin{cases} -2a_2 \Big/ \left\{ \sqrt{a_3^2-4a_2a_4}\cosh\left[\sqrt{-a_2}(x-x_0)\right]+a_3 \right\} & (y\geqslant 0) \\ 2a_2 \Big/ \left\{ \sqrt{a_3^2-4a_2a_4}\cosh\left[\sqrt{-a_2}(x-x_0)\right]-a_3 \right\} & (y\leqslant 0) \end{cases} \tag{2.3.201}$$

其中 x_0 为积分常数.

(4) 方程

$$y'^2 = a_0 - a_1 y + a_2 y^2 \quad 或 \quad y'' = \frac{a_1}{2} - a_2 y \tag{2.3.202}$$

当 $a_1^2-4a_0a_2>0$ 时,方程(2.3.202)可改写为

$$y'^2 = a_2(y-\alpha)(y-\beta) \tag{2.3.203}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2a_2}\left(-a_1 + \sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right),$$

$$\beta = \frac{1}{2a_2}\left(-a_1 - \sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right) \tag{2.3.204}$$

这样,方程(2.3.203)直接积分求得

$$y=\begin{cases} \alpha+(\alpha-\beta)\sinh^2\left[\frac{\sqrt{a_2}}{2}(x-x_0)\right] & (a_2>0, y\geqslant\alpha) \\ \beta-(\alpha-\beta)\sinh^2\left[\frac{\sqrt{a_2}}{2}(x-x_0)\right] & (a_2>0, y\leqslant\beta) \\ \frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{(-2a_2)}\sin\left[\sqrt{-a_2}(x-x_0)\right]+\frac{a_1}{(-2a_2)} & (a_2<0, \beta\leqslant y\leqslant\alpha) \end{cases} \tag{2.3.205}$$

当 $a_1^2-4a_0a_2<0$ 时，方程(2.3.202)可改写为

$$y'^2=a_2(y-\alpha)(y-\alpha^*)=a_2|y-\alpha|^2 \quad (2.3.206)$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2a_2}\left(-a_1+\mathrm{i}\sqrt{4a_0a_2-a_1^2}\right),\ \alpha^*=\frac{1}{2a_2}\left(-a_1-\mathrm{i}\sqrt{4a_0a_2-a_1^2}\right) \quad (2.3.207)$$

这样，只有 $a_2>0$ 时，方程(2.3.206)才有实函数解，且解为

$$y=\frac{\sqrt{4a_0a_2-a_1^2}}{2a_2}\sinh\left[\sqrt{a_2}(x-x_0)\right]-\frac{a_1}{2a_2} \quad (2.3.208)$$

在上面诸式中 x_0 均是积分常数.

2.4 经典的二阶非线性方程

1. Lambert 方程

在(1.1.7)式中已经标记过的 Lambert 方程为

$$y''+(k^2/n)y=(1-n)\frac{1}{y}y'^2 \quad (n\neq 0) \quad (2.4.1)$$

作变换

$$y=z^{\frac{1}{n}} \quad (2.4.2)$$

则 Lambert 方程(2.4.1)化为

$$z''+k^2z=0 \quad (2.4.3)$$

这是关于 $z(x)$ 的二阶常系数线性方程，其解为

$$z=C_1\cos kx+C_2\sin kx \quad (2.4.4)$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.(2.4.4)式代入(2.4.2)式求得 Lambert 方程(2.4.1)的解为

$$y=(C_1\cos kx+C_2\sin kx)^{\frac{1}{n}} \quad (2.4.5)$$

2. 推广的 Lambert 方程

此方程的一般形式为

$$yy'' + ay'^2 + byy' + cy^2 = 0 \quad (a \neq -1) \tag{2.4.6}$$

上述方程可以作变换

$$y = z^{\frac{1}{a+1}} \tag{2.4.7}$$

而化为下列关于 $z(x)$ 的二阶常系数线性方程

$$z'' + bz' + (a+1)cz = 0 \tag{2.4.8}$$

由方程(2.4.8)解得 z 后代入(2.4.7)式即求得 y.

有了 Lambert 方程的求解方法,人们就会自然地去考察下列广义的 Lambert 方程:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)G(y) & \\ + r(x)H(y) &= I(y)y'^2 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

其中 $G(y)$、$H(y)$ 和 $I(y)$ 是 y 的函数. 为了求解方程(2.4.9),我们称二阶线性方程

$$v'' + p(x)v' + q(x)v + r(x) = 0 \tag{2.4.10}$$

为非线性方程(2.4.9)的基础方程. 下面来寻求方程(2.4.9)的解与基础方程(2.4.10)的解之间的联系. 设 v 与 y 存在下列函数关系:

$$v = F(y) \tag{2.4.11}$$

因为

$$v' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}y', \quad v'' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}y'' + \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}y^2}y'^2 \tag{2.4.12}$$

则(2.4.11)式和(2.4.12)式代入方程(2.4.10)得到

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)\left(\frac{F}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}\right) & \\ + r(x)\left(\frac{1}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}\right) &= \left(-\frac{\mathrm{d}^2F/\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}\right)y'^2 \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

方程(2.4.13)与方程(2.4.9)比较得

$$G(y) = \frac{F}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}, \; H(y) = \frac{1}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y}, \; I(y) = -\frac{\mathrm{d}^2F/\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}F/\mathrm{d}y} \tag{2.4.14}$$

因而由(2.4.14)的头两式得

$$v = F(y) = \frac{G(y)}{H(y)} \tag{2.4.15}$$

这就是 y 与 v 的相互转换的关系式. 至于(2.4.14)的第三式可以通过第一式和第二式化为

$$I(y) = \frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{G}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} - 1\right) \tag{2.4.16}$$

若把(2.4.15)式的两边对 y 微商,并注意 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{H}$,则得到

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{G}{H}\right) = 1 \tag{2.4.17}$$

这就是解(2.4.15)存在的条件,它称为连接条件.

由(2.4.16)式,这样满足连接条件(2.4.17)和转换关系(2.4.15)的方程(2.4.13)应改写为

$$\begin{aligned} & y'' + p(x)y' + q(x)G(y) \\ & \quad + r(x)H(y) = \left(\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}\right)y'^2 \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

或

$$\begin{aligned} & y'' + p(x)y' + q(x)G(y) \\ & \quad + r(x)H(y) = \frac{1}{G}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} - 1\right)y'^2 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

表面上看,对 Lambert 方程: $p(x)=0, q(x)=k^2/n$, $G(y)=y$, $r(x)=0$, $\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1-n}{y}$,因而有 $H(y)=y^{1-n}$, $H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{G}{H}\right)=n$. 但若取 $p(x)=0, q(x)=k^2$, $G(y)=\frac{y}{n}$, $H(y)=\frac{1}{n}y^{1-n}$,则 $H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{G}{H}\right)=1$,就满足连接条件了.

例 1 方程

$$y'' + a(x)y^2 = \frac{2}{y}y'^2 \tag{2.4.20}$$

是(2.4.18)式或(2.4.19)式类型的方程.因而

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{G}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} - 1\right) = \frac{2}{y} \tag{2.4.21}$$

由此求得

$$H(y) = Ay^2, G(y) = Ay^2 - y \quad (A = 常数) \tag{2.4.22}$$

这样,将(2.4.22)式代入方程(2.4.18)或(2.4.19)并与方程(2.4.20)比较有

$$p(x) = 0, q(x) = 0, Ar(x) = a(x) \tag{2.4.23}$$

所以,方程(2.4.20)的基础方程为

$$v'' + \frac{1}{A}a(x) = 0 \tag{2.4.24}$$

而据(2.4.15)式有

$$v = \frac{Ay^2 - y}{Ay^2} = 1 - \frac{1}{Ay} \tag{2.4.25}$$

这样,可以由方程(2.4.24)去解 v,再由(2.4.25)式即求得方程(2.4.20)的解为

$$y = \frac{1}{A(1 - v)} \tag{2.4.26}$$

在方程(2.4.20)中,如

$$a(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{2.4.27}$$

取 $A=1$,则由方程(2.4.24)求得

$$v = -\left(\frac{a_2}{12}x^4 + \frac{a_1}{6}x^3 + \frac{a_0}{2}x^2\right) + B_1x + C_1 \tag{2.4.28}$$

其中 B_1 和 C_1 为任意常数.

而由(2.4.26)式求得方程(2.4.20)的解为

$$y = \left(\frac{a_2}{12}x^4 + \frac{a_1}{6}x^3 + \frac{a_0}{2}x^2 + Bx + C\right)^{-1} \tag{2.4.29}$$

其中 $B=-B_1, C=1-C_1$.

在方程(2.4.20)中,如

$$a(x)=\alpha e^{\beta x} \quad (2.4.30)$$

取 $A=1$,则由方程(2.4.24)求得

$$v=-\frac{\alpha}{\beta^2} e^{\beta x}+B_1 x+C_1 \quad (2.4.31)$$

其中 B_1 和 C_1 为任意常数.

而由(2.2.26)式求得方程(2.4.20)的解为

$$y=\left(\frac{\alpha}{\beta^2} e^{\beta x}+B x+C\right)^{1} \quad (2.4.32)$$

其中 $B=-B_1, C=1-C_1$.

2.5 Painleve 方程

在(1.1.9)式中已经标记过的 Painleve 方程为

$$y''=P(x,y)y'^2+Q(x,y)y'+R(x,y) \quad (2.5.1)$$

在某些情况下它可以化为线性方程、Riccati 方程或椭圆方程去求解,否则只能求近似解或渐近解.我们分如下几点说明.

1. 化为线性方程求解

例 1 方程

$$yy''-y'^2+ayy'+by^2=0 \quad (a,b \text{ 为常数}) \quad (2.5.2)$$

它通过变换

$$y=e^z \quad (2.5.3)$$

很容易化为下列关于 $z(x)$ 的二阶常系数线性方程:

$$z''+az'+b=0 \quad (2.5.4)$$

但这是非齐次的,若再令

$$z'=u \quad (2.5.5)$$

则方程化为下列一阶线性方程:

$$u'+au+b=0 \quad (2.5.6)$$

实际上，把变换(2.5.3)与变换(2.5.5)结合，即作变换

$$u = y'/y \tag{2.5.7}$$

便将方程(2.5.2)化为线性方程(2.5.6).

例 2 方程

$$y'' + 3ayy' + a^2y^3 + by = 0 \quad (a,b \text{ 为常数}) \tag{2.5.8}$$

它通过变换

$$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{u'}{u} \tag{2.5.9}$$

化为下列关于 $u(x)$ 的三阶线性方程：

$$u''' + bu' = 0 \tag{2.5.10}$$

例 3 方程

$$y'' - [3y + p(x)]y' + p(x)y + y^3 = 0 \tag{2.5.11}$$

它通过变换

$$y = -\frac{u'}{u} \tag{2.5.12}$$

化为下列关于 $u(x)$ 的三阶线性方程：

$$u''' - p(x)u'' = 0$$

例 4 方程

$$x^2y'' + 4xy' - \lambda xyy' + 2y - \lambda y^2 = 0 \quad (\lambda > 0) \tag{2.5.13}$$

它通过变换

$$t = \frac{1}{x}, \quad y = tu(t) \tag{2.5.14}$$

化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \lambda u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.5.15}$$

上式对 t 积分一次得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{2}u^2 = \frac{\lambda C^2}{2} \quad (C = \text{常数}) \tag{2.5.16}$$

这是 Riccati 方程，很易求得

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}\cdot\dfrac{A}{At+B} & (C=0)\\ A\tanh\left(\dfrac{\lambda A}{2}t+B\right) & (C>0)\\ -A\tan\left(\dfrac{\lambda A}{2}t+B\right) & (C<0)\end{cases}\tag{2.5.17}$$

其中 A、B 为任意常数.

(2.5.17)式代人(2.5.14)式求得方程(2.5.13)的解为

$$y=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}\cdot\dfrac{A}{A+Bx}\\ \dfrac{1}{x}\ A\tanh\left(\dfrac{\lambda A}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+B\right)\\ -\dfrac{1}{x}\ A\tan\left(\dfrac{\lambda A}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+B\right)\end{cases}\tag{2.5.18}$$

例 5 方程

$$y^2y''-3yy'^2+2y'=0\tag{2.5.19}$$

作变换

$$y'=u(y)\tag{2.5.20}$$

后方程(2.5.19)化为

$$y^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-3yu+2=0\tag{2.5.21}$$

它很容易求得

$$u=\frac{1+Cy^4}{2y}\quad (C=\text{常数})\tag{2.5.22}$$

代回(2.5.20)式求得下列隐式解

$$\begin{cases}y^2=x+B & (C=0)\\ y^2=A\tan\left(\dfrac{1}{A}x+B\right) & \left(C=\dfrac{1}{A^2}>0\right)\\ \ln\dfrac{Ay^2+1}{Ay^2-1}=2Ax+B & (C=-A^2<0)\end{cases}\tag{2.5.23}$$

例 6 方程(可称为 Liouville 常微分方程)

$$y'' - \alpha e^{\beta y} = 0 \tag{2.5.24}$$

作变换

$$\beta y = \ln w^{-2} = -2\ln w \tag{2.5.25}$$

后，方程(2.5.24)化为

$$ww'' - w'^2 = -\frac{\alpha\beta}{2} \tag{2.5.26}$$

上式两边对 x 微商得到

$$ww''' - w'w'' = 0 \quad 或 \quad \left(\frac{w''}{w}\right)' = 0 \tag{2.5.27}$$

因而有

$$w'' = Cw \tag{2.5.28}$$

其中 C 为积分常数. 方程(2.5.28)是 w 的二阶常系数线性方程，其通解可以写为

$$w = \begin{cases} Ax + B & (C = 0) \\ A\cos(\sqrt{-C}x + B) & (C < 0) \\ A\cosh(\sqrt{C}x + B) & (C > 0) \end{cases} \tag{2.5.29}$$

其中 A 和 B 是任意常数. (2.5.29)式要满足方程(2.5.26)只有

$$\begin{cases} A = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}} & (C = 0) \\ C = \dfrac{\alpha\beta}{2A^2} & (C < 0) \\ C = -\dfrac{\alpha\beta}{2A^2} & (C > 0) \end{cases} \tag{2.5.30}$$

因此

$$w = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}}\,x + B & (C = 0) \\ A\cos\left(\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2A^2}}\,x + B\right) & (C < 0) \\ A\cosh\left(\sqrt{-\dfrac{\alpha\beta}{2A^2}}\,x + B\right) & (C > 0) \end{cases} \tag{2.5.31}$$

(2.5.31)式代入(2.5.25)式最后求得方程(2.5.24)的解为

$$y=\begin{cases}-\dfrac{2}{\beta}\ln\left(\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}}\,x+B\right) & (C=0)\\ -\dfrac{2}{\beta}\ln\left[A\cos\left(\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2A^2}}\,x+B\right)\right] & (C<0)\\ -\dfrac{2}{\beta}\ln\left[A\cosh\left(\sqrt{-\dfrac{\alpha\beta}{2A^2}}\,x+B\right)\right] & (C>0)\end{cases} \tag{2.5.32}$$

或改写为

$$y=\begin{cases}-\dfrac{2}{\beta}\ln\left(\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}}\,x+\gamma\right) & (C=0)\\ -\dfrac{2}{\beta}\ln\left[\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2k^2}}\cos(kx+\gamma)\right] & (C<0)\\ -\dfrac{2}{\beta}\ln\left[\sqrt{-\dfrac{\alpha\beta}{2k^2}}\cosh(kx+\gamma)\right] & (C>0)\end{cases} \tag{2.5.33}$$

其中 k 和 γ 是任意常数.

例 7 由(1.1.12)式标记的 $\mathrm{P}_{\mathrm{Ⅲ}}$ 方程可以改写为

$$x^2y''-\frac{1}{y}(xy')^2+xy'-x(\alpha y^2+\beta)-\gamma x^2y^3-\frac{\delta x^2}{y}=0 \tag{2.5.34}$$

若作变换

$$x=\mathrm{e}^t,\quad y=z\mathrm{e}^{kt}=x^kz\quad(k-\text{常数}) \tag{2.5.35}$$

则方程(2.5.34)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+(2k-1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+k(k-1)z=\frac{1}{z}(z'+kz)^2-(z'+kz)+\alpha z^2\mathrm{e}^{(k-1)t}-\beta\mathrm{e}^{(1-k)t}+\gamma z^3\mathrm{e}^{(2k+2)t}+\frac{\delta}{z}\mathrm{e}^{(2-2k)t} \tag{2.5.36}$$

在下列两种情况下,方程(2.5.36)可以求解.

(1) $\alpha=\gamma=0, k=1$,则方程(2.5.36)化为

$$z\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\beta z+\delta \tag{2.5.37}$$

令

$$u=\frac{dz}{dt} \tag{2.5.38}$$

则方程(2.5.37)化为

$$zu\frac{du}{dz}=u^2+\beta z+\delta \tag{2.5.39}$$

这是关于 u^2 的线性方程.上式积分得到

$$\frac{dz}{dt}=u=\pm\sqrt{C_1z^2-2\beta z-\delta}\quad (C_1=\text{常数}) \tag{2.5.40}$$

上式积分有

$$\int\frac{dz}{\sqrt{C_1z^2-2\beta z-\delta}}=\pm t+C_2\quad (C_2=\text{常数}) \tag{2.5.41}$$

由此求得 z,代入(2.5.35)式就求得 y.

(2) $\beta=\delta=0, k=-1$,则方程(2.5.36)化为

$$z\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\alpha z^3+\gamma z^4 \tag{2.5.42}$$

同样再作(2.5.35)式的变换,则方程(2.5.42)化为

$$zu\frac{du}{dz}=u^2+\alpha z^3+\gamma z^4 \tag{2.5.43}$$

这是关于 u^2 的线性方程.它积分后得到

$$\frac{dz}{dt}=u=\pm z\sqrt{\gamma z^2+2\alpha z+C_1}\quad (C_1=\text{常数}) \tag{2.5.44}$$

上式积分有

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{\gamma z^2+2\alpha z+C_1}}=\pm t+C_2\quad (C_2=\text{常数}) \tag{2.5.45}$$

由此求得 z，代入(2.5.35)式就求得 y.

2. 化为椭圆方程求解

例 8 方程

$$yy'' = y'^2 + b_0 + b_1 y + b_3 y^3 + b_4 y^4 \tag{2.5.46}$$

它通过变换

$$y = e^z \tag{2.5.47}$$

使方程(2.5.46)化为

$$z'' = b_0 e^{-2z} + b_1 e^{-z} + b_3 e^z + b_4 e^{2z} \tag{2.5.48}$$

上式两边乘以 z' 后积分得到

$$z'^2 = -b_0 e^{-2z} - 2b_1 e^{-z} + 2b_3 e^z + b_4 e^{2z} + b_2 \tag{2.5.49}$$

其中 b_2 为积分常数. 注意，$y' = e^z z'$，则上式化为

$$y'^2 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 \tag{2.5.50}$$

其中

$$\begin{aligned} &a_0 = -b_0, \quad a_1 = -2b_1, \\ &a_2 = b_2, \quad a_3 = 2b_3, \quad a_4 = b_4 \end{aligned} \tag{2.5.51}$$

(2.5.50)式是一个标准的椭圆方程.

3. 化为 Riccati 方程求解

例 9 由(1.1.15)式标记的 P_{VI} 方程为

$$\begin{aligned} y'' = &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y' \\ &+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right] \end{aligned} \tag{2.5.52}$$

我们设法将方程(2.5.52)与下列 Riccati 方程

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{2.5.53}$$

建立联系. 其中 $a(x)$，$b(x)$ 和 $c(x)$ 待定. (2.5.53)式两边对 x 微商有

$$\begin{aligned} y'' = &2a(x)yy' + a'(x)y^2 + b(x)y' \\ &+ b'(x)y + c'(x) \end{aligned} \tag{2.5.54}$$

将(2.5.53)式和(2.5.54)式代入到方程(2.5.52),并使 y 的各个幂次的系数为零,得到

$$x^2(x-1)^2a^2(x)=2\alpha \tag{2.5.55}$$

$$x^2(x-1)^2[a'(x)-(x+1)a(x)]+x(x-1)\times(2x-1)a(x)+2\alpha(x+1)=0 \tag{2.5.56}$$

$$\begin{aligned}x^2(x-1)^2[b^2(x)&+2a(x)c(x)-2b'(x)-3xa^2(x)\\&+2(x+1)a'(x)+2(x+1)a(x)b(x)]\\&-2x(x-1)[(2x-1)b(x)+(1-2x-x^2)a(x)]\\&+2\alpha(x^2+4x+1)+2\beta x+2\gamma(x-1)\\&+2\delta x(x-1)=0\end{aligned} \tag{2.5.57}$$

$$\begin{aligned}x(x-1)^2[(x+1)b'(x)&+2b(x)c(x)-c'(x)\\&-xa'(x)-2xa(x)b(x)]-(x-1)[(2x-1)c(x)\\&+(1-2x-x^2)b(x)+x^2a(x)]-2\alpha(x+1)\\&-2\beta(x+1)-2\gamma(x-1)-2\delta(x-1)=0\end{aligned} \tag{2.5.58}$$

$$\begin{aligned}x(x-1)^2[3c^2(x)&-2(x+1)b(x)c(x)+2(x+1)c'(x)\\&-xb^2(x)-2xa(x)c(x)-2xb'(x)]\\&-2(x-1)[(1-2x-x^2)c(x)+x^2b(x)]+2\alpha x\\&+2\beta(x^2+4x+1)+2\gamma x(x-1)+2\delta(x-1)=0\end{aligned} \tag{2.5.59}$$

$$(x-1)^2[xc'(x)+(x+1)c^2(x)]+x(x-1)c(x)+2\beta(x+1)=0 \tag{2.5.60}$$

$$(x-1)^2c^2(x)+2\beta=0 \tag{2.5.61}$$

非常有意思的是,由(2.5.55)式很快确定的

$$a(x)=\frac{\sqrt{2\alpha}}{x(x-1)} \tag{2.5.62}$$

能自动满足(2.5.56)式.而由(2.5.61)式很快确定的

$$c(x)=\frac{\sqrt{-2\beta}}{x-1} \tag{2.5.63}$$

也能自动满足(2.5.60)式.而且经过一些列运算,若选择

$$b(x) = \frac{\lambda x + \mu}{x(x-1)} \tag{2.5.64}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{2\alpha} - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} - 1}, \quad \mu = \dfrac{\sqrt{-2\beta} - (\alpha + \beta - \gamma - \delta)}{\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} - 1} \\ \lambda + \mu = -\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} \quad (\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} - 1 \neq 0) \end{cases} \tag{2.5.65}$$

只要方程(2.5.52)中的常数满足

$$\begin{aligned} &2\sqrt{2\alpha}(-\alpha + 3\beta + \gamma - \delta) + 2\sqrt{-2\beta}(3\alpha - \beta - \gamma + \delta) \\ &\quad + 4\sqrt{-\alpha\beta}(-\alpha + \beta + \gamma - \delta - 1) + 2(\alpha - \beta - \gamma) + \alpha^2 \\ &\quad - 6\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + \beta^2 + 2\beta\gamma - 2\beta\delta + \gamma^2 \\ &\quad + 2\gamma\delta + \delta^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.5.66}$$

那么(2.5.57)式、(2.5.58)式和(2.5.59)式也能满足.

这样,Riccati 方程(2.5.53)就改写为

$$y' = \frac{\sqrt{2\alpha}}{x(x-1)} y^2 + \frac{\lambda x + \mu}{x(x-1)} y + \frac{\sqrt{-2\beta}}{x-1} \tag{2.5.67}$$

依(2.2.26)式,作变换

$$y = -\frac{x(x-1)}{\sqrt{2\alpha}} \frac{z'}{z} \quad (\alpha \neq 0) \tag{2.5.68}$$

则方程(2.5.67)化为

$$z'' + \frac{(2-\lambda)z - \mu - 1}{x(x-1)} z' + \frac{2\sqrt{-\alpha\beta}}{x(x-1)^2} z = 0 \tag{2.5.69}$$

这是包含三个正则奇点 $x=0,1,\infty$ 的 Fuchs 型方程,作自变量变换

$$\xi = \frac{1}{1-x} \tag{2.5.70}$$

则方程(2.5.69)化为下列超比方程(即 Gauss 方程):

$$\xi(1-\xi)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} + [\gamma_1 - (1 + \alpha_1 + \beta_1)\xi]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} - \alpha_1\beta_1 z = 0 \tag{2.5.71}$$

其中

$$\alpha_1 = -\sqrt{2\alpha}, \quad \beta_1 = -\sqrt{-2\beta}, \quad \gamma_1 = \lambda \tag{2.5.72}$$

由方程(2.5.71)解得 z,代入(2.5.68)式就求得 y.

4. 求渐近解

例 10 方程

$$y'' = 6y^2 + x \tag{2.5.73}$$

这是由(1.1.10)式标记的 Painleve P_1 方程.通常方程(2.5.73)是不能严格化简和准确求解的.但若作变换

$$y = x^{1/2}z(\xi), \quad \xi = \frac{4}{5}x^{5/4} \tag{2.5.74}$$

则方程(2.5.73)化为

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = 6z^2 + 1 - \frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi} + \frac{4}{25\xi^2}z \tag{2.5.75}$$

在 ξ 很大时,方程(2.5.75)化为

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = 6z^2 + 1 \tag{2.5.76}$$

或上式两边乘以 $2\frac{dz}{d\xi}$,并积分得到

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = 4z^3 - 2z - g_3 \quad (g_3 - 常数) \tag{2.5.77}$$

方程(2.5.76)或方程(2.5.77)的解是 Weierstrass 椭圆函数(见(2.3.190)式).

$$z = p(\xi; -2, g_3) \tag{2.5.78}$$

代入(2.5.74)式就得到方程(2.5.73)在 x 很大时的渐近解为

$$y = x^{1/2}p\left(\frac{4}{5}x^{5/4}; -2, g_3\right) \quad (x \to \infty) \tag{2.5.79}$$

例 11 方程

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha \tag{2.5.80}$$

这是由(1.1.11)式标记的 Painleve 方程 P_1.若作变换(称为 Boutroux 变换)

$$y = x^{1/2}z(\xi), \quad \xi = \frac{2}{3}x^{3/2} \tag{2.5.81}$$

则方程(2.5.80)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}=2z^3+z-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}+\frac{z}{9\xi^2}+\frac{2\alpha}{3\xi} \tag{2.5.82}$$

在 ξ 很大时,方程(2.5.82)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}=2z^3+z \tag{2.5.83}$$

这是(2.3.106)式类型的方程:$\mu^2=\frac{1}{2-k^2}$,$A^2=\mu^2k'^2$. 因此,方程(2.5.83)的解为

$$z=A\mathrm{sc}(\mu\xi,k) \tag{2.5.84}$$

代入(2.5.81)式就求得方程(2.5.80)在 x 很大时的渐近解为

$$y=Ax^{1/2}\mathrm{sc}\left(\frac{2}{3}\mu x^{3/2},k\right)\quad(x\to\infty) \tag{2.5.85}$$

2.6 Euler 方程组

在(1.1.32)式中已经标记过的 Euler 方程组为

$$\begin{cases}\dot{m}_1=\gamma_1m_2m_3\\ \dot{m}_2=\gamma_2m_3m_1\\ \dot{m}_3=\gamma_3m_1m_2\end{cases} \tag{2.6.1}$$

其中

$$\gamma_1=\frac{I_2-I_3}{I_2I_3},\quad\gamma_2=\frac{I_3-I_1}{I_3I_1},\quad\gamma_3=\frac{I_1-I_2}{I_1I_2} \tag{2.6.2}$$

设 $\gamma_1>0,\gamma_2<0,\gamma_3>0$. 注意 Hamilton 量(相当于总能量)

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1}+\frac{m_2^2}{I_2}+\frac{m_3^2}{I_3}\right) \tag{2.6.3}$$

和总角动量的平方

$$M^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2 \tag{2.6.4}$$

为 Euler 方程组(2.6.1)中的守恒量,且

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0,\quad\frac{\gamma_1}{I_1}+\frac{\gamma_2}{I_2}+\frac{\gamma_3}{I_3}=0 \tag{2.6.5}$$

设 m_1, m_2, m_3 的初值分别是 m_{10}, m_{20}, m_{30}，利用(2.6.3)式和(2.6.4)式可将 m_1, m_2, m_3 中的任意两个用另一个表示，这些关系式为

$$\begin{cases} m_1^2 - m_{10}^2 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}(m_2^2 - m_{20}^2) = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}(m_3^2 - m_{30}^2) \\ m_2^2 - m_{20}^2 = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}(m_1^2 - m_{10}^2) = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}(m_3^2 - m_{30}^2) \\ m_3^2 - m_{30}^2 = \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}(m_1^2 - m_{10}^2) = \dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}(m_2^2 - m_{20}^2) \end{cases} \tag{2.6.6}$$

这样，Euler 方程组(2.6.1)中的任何一个方程都可以成为单一未知函数的非线性常微分方程. 例如，将 Euler 方程组(2.6.1)的第一个方程两边平方，并利用(2.6.6)式，就得到一个关于 m_1 的非线性常微分方程为

$$\dot{m}_1^2 = \frac{\omega^2}{A_1^2}(A_1^2 - m_1^2)(k'^2 A_1^2 + k^2 m_1^2) \tag{2.6.7}$$

类似有

$$\dot{m}_2^2 = \frac{\omega^2}{A_2^2}(A_2^2 - m_2^2)(A_2^2 - k^2 m_2^2) \tag{2.6.8}$$

$$\dot{m}_3^2 = \frac{\omega^2}{A_3^2}(A_3^2 - m_3^2)(m_3^2 - k'^2 A_3^2) \tag{2.6.9}$$

在(2.6.7)式、(2.6.8)式和(2.6.9)式中

$$A_1^2 = m_{10}^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} m_{20}^2, \quad A_2^2 = m_{20}^2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} m_{10}^2, \quad A_3^2 = m_{30}^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} m_{20}^2 \tag{2.6.10}$$

$$k^2 = \frac{-\dfrac{m_{10}^2}{\gamma_1} + \dfrac{m_{20}^2}{\gamma_2}}{-\dfrac{m_{30}^2}{\gamma_3} + \dfrac{m_{20}^2}{\gamma_2}}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{-\dfrac{m_{30}^2}{\gamma_3} + \dfrac{m_{10}^2}{\gamma_1}}{-\dfrac{m_{30}^2}{\gamma_3} + \dfrac{m_{20}^2}{\gamma_2}} \tag{2.6.11}$$

$$\omega^2 = \gamma_1(\gamma_3 m_{20}^2 - \gamma_2 m_{30}^2) \tag{2.6.12}$$

显然有

$$A_2^2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_1^2, \quad A_3^2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} A_1^2, \quad A_2^2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} A_3^2 \tag{2.6.13}$$

$$\omega^2 = \gamma_1\gamma_3A_2^2 = -\gamma_1\gamma_2A_3^2 = -\gamma_2\gamma_3A_1^2 \qquad (2.6.14)$$

将方程(2.6.7)、(2.6.8)和(2.6.9)分别与方程(2.3.90)、(2.3.87)和(2.3.93)比较即求得 Euler 方程组(2.6.1)的解为

$$\begin{cases} m_1(t) = A_1\mathrm{cn}(\omega t - \alpha_1, k) \\ m_2(t) = A_2\mathrm{sn}(\omega t - \alpha_2, k) \\ m_3(t) = A_3\mathrm{dn}(\omega t - \alpha_3, k) \end{cases} \qquad (2.6.15)$$

其中

$$\alpha_1 = \mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{m_{10}}{A_1}\right), \quad \alpha_2 = \mathrm{sn}^{-1}\left(-\frac{m_{20}}{A_2}\right), \quad \alpha_3 = \mathrm{dn}^{-1}\left(\frac{m_{30}}{A_3}\right) \qquad (2.6.16)$$

而且在 $k \to 1$ 时,有下列两种解.

1. $m_{30} = \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_1}}\, m_{10}$,此时(2.6.15)式变为

$$\begin{cases} m_1^+(t) = \pm M\sqrt{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\,\mathrm{sech}\left(-\sqrt{\gamma_1\gamma_3}Mt - \alpha_1\right) \\ m_2^+(t) = \pm M\tanh\left(-\sqrt{\gamma_1\gamma_3}Mt - \alpha_2\right) \\ m_3^+(t) = \pm M\sqrt{-\frac{\gamma_3}{\gamma_2}}\,\mathrm{sech}\left(-\sqrt{\gamma_1\gamma_3}Mt - \alpha_3\right) \end{cases} \qquad (2.6.17)$$

2. $m_{30} = -\sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_1}}\, m_{10}$,此时(2.6.15)式变为

$$m_1(t) = m_1^+(-t), \quad m_2(t) = m_2^+(-t), \quad m_3(t) = -m_3^+(-t) \qquad (2.6.18)$$

2.7 差分方程

1. Logistic 映射

取 $\mu=4$,则 Logistic 映射(1.3.1)写为

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (0 \leqslant x_n \leqslant 1) \qquad (2.7.1)$$

这是表征二次映射的差分方程，若初始迭代值为 x_0，求 x_n 的表达式. 为此，作变换

$$x_n = \sin^2 t_n \tag{2.7.2}$$

代入方程(2.7.1)得到

$$\sin^2 t_{n+1} = 4\sin^2 t_n - 4\sin^4 t_n \tag{2.7.3}$$

利用三角公式 $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)$，(2.7.3)式很容易改写为

$$\cos 2t_{n-1} = \cos 4t_n \tag{2.7.4}$$

因而 $2t_{n+1} = 2k\pi + 4t_n$ 或

$$t_{n+1} = k\pi + 2t_n \quad (k\ \text{为任意整数}) \tag{2.7.5}$$

由此求得 $t_1 = k\pi + 2t_0$，$t_2 = k\pi + 2t_1 = 3k\pi + 2^2 t_0 \cdots$

$$t_n = (2^n - 1)k\pi + 2^n t_0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.7.6}$$

代入(2.7.2)式求得

$$\begin{aligned} x_n &= \sin^2[(2^n - 1)k\pi + 2^n t_0] = \sin^2(2^n t_0) \\ &= \sin^2\left(2^n \sin^{-1}\sqrt{x_0}\right) \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

这就是 Logistic 映射(2.7.1)的解析解. 显然，若

$$\sin^{-1}\sqrt{x_0} = \pi\theta_0 \tag{2.7.8}$$

则只要 θ_0 为有理数($\theta_0 = p/q$，p，q 为整数，$p<q$)，则(2.7.7)式表征周期解；否则 θ_0 为无理数时，(2.7.7)式表征非周期解.

类似，对于二次映射

$$x_{n+1} = x_n^2 \tag{2.7.9}$$

很易求得解为

$$x_n = (x_0)^{2^n} \tag{2.7.10}$$

同样，对于二次映射

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \tag{2.7.11}$$

不难求得解为

$$x_n = \begin{cases} \cos(2^n \cos^{-1} x_0) & (|x_n| \leqslant 1) \\ \cosh(2^n \cosh^{-1} x_0) & (|x_n| \geqslant 1) \end{cases} \tag{2.7.12}$$

2. 帐篷映射

已在(1.3.2)式中标记过的帐篷映射为

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & \left(0\leqslant x_n\leqslant \frac{1}{2}\right)\\ 2(1-x_n) & \left(\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\right)\end{cases}\qquad(2.7.13)$$

在(1.3.3)式中我们已经说明：在 Logistic 映射(2.7.1)中作变换 $x_n=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)$ 后 y_n 即满足帐篷映射. 所以我们先按此变换，根据解(2.7.7)去确定 y_n、然后再把 y_n 改写为 x_n 即得. 注意 $x_0=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_0\right)$，则有

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)=\sin^2\left(2^n\sin^{-1}\sqrt{x_0}\right)=\sin^2\left(2^n\cdot\frac{\pi}{2}y_0\right)$$
$$=\sin^2(2^{n-1}\pi y_0)\qquad(2.7.14)$$

应用三角公式 $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$，上式化为

$$\cos\pi y_n=\cos(2^n\pi y_0)\qquad(2.7.15)$$

由此求得

$$\pi y_n=\cos^{-1}[\cos(2^n\pi y_0)]\qquad(2.7.16)$$

把 y_n 记为 x_n，y_0 记为 x_0 就求得帐篷映射(2.7.13)的解为

$$x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}[\cos(2^n\pi x_0)]\qquad(2.7.17)$$

同样，若 $x_0=p/q$(p、q 为整数，$p<q$)的有理数时，(2.7.17)式表征周期解；而当 x_0 为无理数时，(2.7.17)式表征非周期解.

3. 移位映射

已在(1.3.4)式中标记过的移位映射是

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & \left(0\leqslant x_n\leqslant \frac{1}{2}\right)\\ 2x_n-1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\right)\end{cases}\qquad(2.7.18)$$

由上式不难得到

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n=2^{n+1}x_0 & \left(0\leqslant x_n\leqslant \dfrac{1}{2}\right)\\ 2x_n-1=2[2^n x_0-(2^n-1)]-1 & \\ \qquad =2^{n+1}x_0-(2^{n+1}-1) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\right)\end{cases}$$

(2.7.19)

因而有

$$\pi x_{n+1}=\begin{cases}2\pi x_n=2^{n+1}\pi x_0 & \left(0\leqslant x_n\leqslant \dfrac{1}{2}\right)\\ 2\pi x_n-\pi=2^{n+1}\pi x_0-(2^{n-1}-1)\pi & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\right)\end{cases}$$

(2.7.20)

且上式总满足

$$\sin(\pi x_n-2^n\pi x_0)=0 \qquad (2.7.21)$$

即

$$(\sin\pi x_n)(\cos 2^n\pi x_0)-(\cos\pi x_n)(\sin 2^n\pi x_0)=0 \qquad (2.7.22)$$

因而

$$\cot\pi x_n=\cot(2^n\pi x_0) \qquad (2.7.23)$$

由此求得

$$x_n=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}[\cot(2^n\pi x_0)] \qquad (2.7.24)$$

这就是移位映射(2.7.18)的解. 它在 x_0 是有理数时($x_0=p/q$, p, q 为整数, $p<q$)表征周期解;在 x_0 为无理数时,表征非周期解.

4. 高次映射

(1) 三次映射

在(1.3.6)式中已经标记过的三次映射为

$$x_{n+1}=x_n(3-4x_n^2) \quad (-1\leqslant x_n\leqslant 1) \qquad (2.7.25)$$

若作变换

$$x_n=\sin t_n \qquad (2.7.26)$$

并利用公式 $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$，则方程(2.7.25)化为

$$\sin t_{n+1} = \sin 3t_n \tag{2.7.27}$$

因而

$$t_{n+1} = 2k\pi + 3t_n = (3^{n+1} - 1)k\pi + 3^{n+1}t_0 \tag{2.7.28}$$

故方程(2.7.25)的解为

$$x_n = \sin(3^n t_0) = \sin(3^n \sin^{-1} x_0) \tag{2.7.29}$$

若 $\sin^{-1} x_0 = \pi\theta_0, \theta_0 = p/q$（$p, q$ 为整数，$p < q$）的有理数时，则(2.7.29)式表征周期解；θ_0 为无理数，(2.7.29)式表征非周期解.

(2) 四次映射

在(1.3.7)式中已经标记过的四次映射为

$$x_{n+1} = 16x_n(1 - x_n)(1 - 2x_n)^2 \quad (0 \leqslant x_n \leqslant 1) \tag{2.7.30}$$

若作变换

$$x_n = \sin^2 t_n \tag{2.7.31}$$

则方程(2.7.30)很易化为

$$\cos 2t_{n+1} = \cos 8t_n \tag{2.7.32}$$

因而

$$t_{n+1} = k\pi + 4t_n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)k\pi + 4^{n+1}t_0 \tag{2.7.33}$$

故方程(2.7.30)的解为

$$x_n = \sin^2(4^n t_0) = \sin^2\left(4^n \sin^{-1}\sqrt{x_0}\right) \tag{2.7.34}$$

若 $\sin^{-1}\sqrt{x_0} = \pi p/q$（$p, q$ 为整数，$p < q$），p/q 为有理数，则(2.7.34)式表征周期解；p/q 为无理数，(2.7.29)式表征非周期解.

(3) 五次映射

在(1.3.8)式中已经标记过的五次映射为

$$x_{n+1} = x_n(5 - 20x_n^2 + 16x_n^4) \quad (-1 \leqslant x_n \leqslant 1) \tag{2.7.35}$$

若作变换

$$x_n = \sin t_n \tag{2.7.36}$$

并利用公式 $\sin 5t=5-20\sin^2 t+16\sin^4 t$，则方程(2.7.35)化为

$$\sin t_{n+1} = \sin 5t_n \tag{2.7.37}$$

因而

$$t_{n+1} = 2k\pi + 5t_n = \frac{1}{2}(5^{n+1}-1)k\pi + 5^{n+1}t_0 \tag{2.7.38}$$

故方程(2.7.35)的解为

$$x_n = \sin(5^n t_0) = \sin(5^n \sin^{-1} x_0) \tag{2.7.39}$$

若 $\sin^{-1} x_0 = \pi\theta_0$，$\theta_0 = p/q$（$p$，$q$ 为整数，$p<q$）的有理数时，(2.7.39)式表征周期解；θ_0 为无理数时，(2.7.39)式表征非周期解。

5. Toda 映射

在(1.3.13)式中已经标记过的 Toda 映射为

$$\ddot{r}_n = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}) \quad \left(\ddot{r}_n \equiv \frac{d^2 r_n}{dt^2}\right) \tag{2.7.40}$$

为了求解它，可作变换

$$\xi_n = br_n, \quad \tau = \sqrt{ab}\,t \tag{2.7.41}$$

则方程(2.7.40)可以改写为

$$\frac{d^2\xi_n}{d\tau^2} = 2e^{-\xi_n} - e^{-\xi_{n+1}} - e^{-\xi_{n-1}} \tag{2.7.42}$$

再令

$$e^{-\xi_n} = 1 + \eta_n \tag{2.7.43}$$

则方程(2.7.42)改写为

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\ln(1+\eta_n) = \eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\eta_n \tag{2.7.44}$$

上式对 τ 积分一次得到

$$\frac{d}{d\tau}\ln(1+\eta_n) = p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n \tag{2.7.45}$$

其中

$$p_n = \int \eta_n \mathrm{d}\tau \quad \left(\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}\tau} = \eta_n \right) \tag{2.7.46}$$

方程(2.7.45)再对 τ 积分一次有

$$\ln(1 + \eta_n) = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n \tag{2.7.47}$$

其中

$$q_n = \int p_n \mathrm{d}\tau \quad \left(\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}\tau} = p_n,\ \frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}\tau^2} = \eta_n \right) \tag{2.7.48}$$

注意 $\eta_n = \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}\tau^2}$,则方程(2.7.47)改写为

$$\ln\left(1 + \frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}\tau^2} \right) = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n \tag{2.7.49}$$

再令

$$\mathrm{e}^{q_n} = s_n \quad (q_n = \ln s_n) \tag{2.7.50}$$

则方程(2.7.49)又可改写为

$$1 + \frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}\tau^2} = s_{n+1} s_{n-1} s_n^{-2} \tag{2.7.51}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{s_n} \frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}\tau},\ \frac{\mathrm{d}^2 q_n}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{s_n^2}\left[s_n \frac{\mathrm{d}^2 s_n}{\mathrm{d}\tau^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 \right] \tag{2.7.52}$$

则方程(2.7.51)化为

$$s_n \frac{\mathrm{d}^2 s_n}{\mathrm{d}\tau^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 = s_{n+1} s_{n-1} - s_n^2 \tag{2.7.53}$$

这是一类微分-差分方程,它可以求指数形式解.为此,令

$$s_n = 1 + \mathrm{e}^{2(\alpha n - \beta\tau - \delta)} \tag{2.7.54}$$

其中 α,β,δ 为常数.(2.7.54)式代入方程(2.7.53)得到

$$\beta = \sinh\alpha \tag{2.7.55}$$

这样,在(2.7.54)式中只存在两个常数 α 和 δ.(2.7.54)式代入(2.7.50)式求得

$$q_n = \ln\left[1 + \mathrm{e}^{2(\alpha n - \beta\tau - \delta)}\right] \tag{2.7.56}$$

它代入(2.7.48)式求得

$$p_n = -2\beta \cdot \frac{e^{2(\alpha n - \beta\tau - \delta)}}{1 + e^{2(\alpha n - \beta\tau - \delta)}} \tag{2.7.57}$$

它代入(2.7.46)式求得

$$\eta_n = \beta^2 \mathrm{sech}^2(\alpha n - \beta\tau - \delta) \tag{2.7.58}$$

它代入(2.7.43)式求得

$$\xi_n = \ln \frac{1}{1 + \beta^2 \mathrm{sech}^2(\alpha n - \beta\tau - \delta)} \tag{2.7.59}$$

再代入(2.7.41)式求得

$$r_n = -\frac{1}{b} \ln\left[1 + \beta^2 \mathrm{sech}^2(\alpha n - \beta\sqrt{ab}t - \delta)\right] \tag{2.7.60}$$

这就是 Toda 映射关于 r_n 的解,称为 Toda 孤立波,或称为 Toda 孤立子.

2.8 函数方程

1. Canchy 方程

(1) 在(1.4.1)式中已经标记过的方程

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \tag{2.8.1}$$

显然,它有解

$$u(x) = \alpha x \quad (\alpha \neq 0, \text{实常数}) \tag{2.8.2}$$

而且对任何实的常数 λ,因 $u(\lambda x + \lambda y) = u(\lambda x) + u(\lambda y)$,则 $u(x)$ 必然满足

$$u(\lambda x) = \lambda u(x) \tag{2.8.3}$$

(2) 在(1.4.2)式中已经标记过的方程

$$u(x+y) = u(x)u(y) \tag{2.8.4}$$

显然,它有解

$$u(x) = e^{\alpha x} \quad (\alpha = \text{实常数}) \tag{2.8.5}$$

而且对任何实的常数 λ 必有

$$u(\lambda x) = (u(x))^{\lambda} \tag{2.8.6}$$

(3) 在(1.4.3)式中已经标记过的方程

$$u(xy)=u(x)+u(y) \tag{2.8.7}$$

显然,它有解

$$u(x)=\alpha\ln x \quad (\alpha\neq 0,\text{实常数}) \tag{2.8.8}$$

而且对任何实的常数 λ 必有

$$u(x^{\lambda})=\lambda u(x) \tag{2.8.9}$$

(4) 在(1.4.4)式中已经标记过的方程

$$u(xy)=u(x)u(y) \tag{2.8.10}$$

显然,它有解

$$u(x)=x^{\alpha} \quad (\alpha=\text{常数}) \tag{2.8.11}$$

而且对任何实的常数 λ 必有

$$u(x^{\lambda})=(u(x))^{\lambda} \tag{2.8.12}$$

2. Pexider 方程

(1) 在(1.4.8)式中已经标记过的方程

$$u(x+y)=v(x)+w(y) \tag{2.8.13}$$

显然,它有解

$$u(x)=\alpha x+\beta+\gamma,\quad v(x)=\alpha x+\beta,\quad w(x)=\alpha x+\gamma \tag{2.8.14}$$

其中 α、β 和 γ 为常数.

(2) 在(1.4.9)式中已经标记过的方程

$$u(x+y)=v(x)w(y) \tag{2.8.15}$$

显然,它有解

$$u(x)=\beta\gamma e^{\alpha x},\quad v(x)=\beta e^{\alpha x},\quad w(x)=\gamma e^{\alpha x} \tag{2.8.16}$$

其中 α,β 和 γ 为常数.

(3) 在(1.4.10)式中已经标记过的方程

$$u(xy)=v(x)+w(y) \tag{2.8.17}$$

显然,它有解

$$u(x)=\alpha\ln(\beta\gamma x),\quad v(x)=\alpha\ln(\beta x),\quad w(x)=\alpha\ln(\gamma x) \tag{2.8.18}$$

其中 α,β 和 γ 为常数，且 $\beta>0,\gamma>0$.

(4) 在(1.4.11)式中已经标记过的方程

$$u(xy)=v(x)w(y) \tag{2.8.19}$$

显然，它有解

$$u(x)=\beta\gamma x^{\alpha},\ v(x)=\beta x^{\alpha},\quad w(x)=\gamma x^{\alpha} \tag{2.8.20}$$

其中 α,β 和 γ 为常数.

3. Euler 方程(齐次函数方程)

在(1.4.17)式中已经标记过的 Euler 方程为

$$u(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{m}u(x,y) \tag{2.8.21}$$

若在方程(2.8.21)中取 $\lambda=1/x$，并令 $u(1,y/x)=F(y/x)$，则得到

$$u(x,y)=x^{m}F(y/x) \tag{2.8.22}$$

这就是 Euler 方程(2.8.21)的解，其中 $F(y/x)$ 是 y/x 的任意函数. 如取 $F(y/x)=c(y/x)^{m/2}$，则(2.8.22)式化为

$$u(x,y)=c(xy)^{m/2}\quad (c=\text{常数}) \tag{2.8.23}$$

这就是 Euler 方程(2.8.21)的一个幂函数解.

类似，在方程(2.8.21)中取 $\lambda=1/y$，并令 $u(x/y,1)=G(x/y)$，则得到

$$u(x,y)=y^{m}G(x/y) \tag{2.8.24}$$

它也是 Euler 方程(2.8.21)的解，其中 $G(x/y)$ 是 x/y 的任意函数.

4. 标度方程

(1) 在(1.4.19)式中已经标记过的方程

$$u(\lambda x)=\lambda^{\alpha}u(x) \tag{2.8.25}$$

中取 $\lambda=1/x$，并令 $u(1)=c$(常数)，则得到

$$u(x)=cx^{\alpha} \tag{2.8.26}$$

这就是标度方程(2.8.25)的解.

(2) 在(1.4.20)式中已经标记过的方程

$$u(\lambda^{\alpha}x,\lambda^{\beta}y)=\lambda u(x,y) \tag{2.8.27}$$

中取 $\lambda=x^{-1/\alpha}$，并令 $u(1,x^{-\beta/\alpha}y)=F(x^{-\beta/\alpha}y)$，则得到

$$u(x,y) = x^{1/\alpha}F(x^{-\beta/\alpha}y) \tag{2.8.28}$$

这就是标度方程(2.8.27)的解，其中 $F(x^{-\beta/\alpha}y)$ 是 $x^{-\beta/\alpha}y$ 的任意函数. 如取 $F(x^{-\beta/\alpha}y)=c(x^{-\beta/\alpha}y)^{1/2\beta}=cx^{-1/2\alpha}y^{1/2\beta}$，则(2.8.28)式化为

$$u(x,y) = cx^{1/2\alpha}y^{1/2\beta} \tag{2.8.29}$$

这是标度方程(2.8.27)的一个幂函数解.

类似，在方程(2.8.27)中取 $\lambda=y^{-1/\beta}$，并令 $u(xy^{-\alpha/\beta},1)=G(xy^{-\alpha/\beta})$，则得到

$$u(x,y) = y^{1/\beta}G(xy^{-\alpha/\beta}) \tag{2.8.30}$$

它也是标度方程(2.8.27)的解，其中 $G(xy^{-\alpha/\beta})$ 是 $xy^{-\alpha/\beta}$ 的任意函数.

(3) 在(1.4.21)式中已经标记过的方程

$$u(\lambda^{\alpha}x,\lambda^{\beta}y) = \lambda^{\gamma}u(x,y) \tag{2.8.31}$$

中取 $\lambda=x^{-1/\alpha}$，并令 $u(1,x^{-\beta/\alpha}y)=F(x^{-\beta/\alpha}y)$，则得到

$$u(x,y) = x^{\gamma/\alpha}F(x^{-\beta/\alpha}y) \tag{2.8.32}$$

这就是标度方程(2.8.31)的解，其中 $F(x^{-\beta/\alpha}y)$ 是 $x^{-\beta/\alpha}y$ 的任意函数. 如取 $F(x^{-\beta/\alpha}y)=c(x^{-\beta/\alpha}y)^{\gamma/2\beta}=cx^{-\gamma/2\alpha}y^{\gamma/2\beta}$，则(2.8.32)式化为

$$u(x,y) = cx^{\gamma/2\alpha}y^{\gamma/2\beta} \tag{2.8.33}$$

这是标度方程(2.8.31)的一个幂函数解.

类似，在方程(2.8.31)中取 $\lambda=y^{-1/\beta}$，并令 $u(xy^{-\alpha/\beta},1)=G(xy^{-\alpha/\beta})$，则得到

$$u(x,y) = y^{\gamma/\beta}G(xy^{-\alpha/\beta}) \tag{2.8.34}$$

它也是标度方程(2.8.31)的解，其中 $G(xy^{-\alpha/\beta})$ 是 $xy^{-\alpha/\beta}$ 的任意函数.

应该指出的是：这里给出的标度方程的解，如(2.8.28)式、(2.8.30)式、(2.8.32)式和(2.8.34)式均可以称为自相似解，详细讨论见第 7 章.

5. Fermi-Dirac 函数方程

不难证明，在(1.4.25)式中已经标记过的 Fermi-Dirac 函数方程

$$u(x)+(1+x)u\left(\frac{y}{1+x}\right)=u(y)+(1+y)u\left(\frac{x}{1+y}\right) \tag{2.8.35}$$

有解

$$u(x)=x\ln x+(1+x)\ln(1+x) \tag{2.8.36}$$

它称为 Fermi-Dirac 熵函数．实际上(2.8.35)式就是 Fermi-Dirac 熵函数的量子统计分布律．

习　题　2

2.1　求解下列等尺度方程或尺度不变方程

(1) $x^2y''=y'y'''$

(2) $x^2y''+17xy'+101y=0$

(3) $y'^2+yy''+x=0$

(4) $y''=y'^2\cdot\dfrac{2y-1}{y^2+1}$

2.2　求解下列 Bernoulli 方程

(1) $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$

(2) $y'+\dfrac{2}{x}y=3x^2y^{4/3}$

(3) $y'-3xy-xy^2=0$

2.3　求解下列 Riccati 方程

(1) $y'=A^2x^{-4}-y^2$

(2) $y'+ay^2=bx^{\ \ 2}$

(3) $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\mu v^2\quad(\mu>0)$

(4) $x(1-x^3)y'=x^2+y-2xy^2$

2.4　求解下列 Chrystal 方程

(1) $y'^2+3xy'-4x^2=0$

(2) $y'^2+xy'-3y+\frac{1}{2}x^2=0$

2.5　求解下列 Liouville 常微分方程

(1) $y''=Ae^y$

(2) $y''=Ae^{-y}$

2.6　求解下列椭圆方程

(1) $y'^2=(1-y^2)\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)$

(2) $y'^2=(1-y^2)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}y^2\right)$

(3) $y''=2-5y+\frac{3}{2}y^2$

(4) $y''=\frac{3}{2}-2y-\frac{3}{2}y^2$

2.8　作 $y'=u(y)$ 的变换后求解

(1) $(1+y^2)y''+(1-2y)y'^2=0$

(2) $[yy''-(y')^2]^2+4yy'^3=0$

(3) $yy''=\alpha y'^2\quad(\alpha\neq1)$

2.9　化下列方程为椭圆方程求解

(1) $y''=e^{-2y}-e^y$

(2) $y''=-2e^{-y}+3e^{2y}$

*2.10　对于 Toda 方程(2.7.53)，设

$$
\begin{aligned}
s_n = 1 &+ A_1e^{2(\alpha_1 n-\beta_1 t)} + A_2e^{2(\alpha_2 n-\beta_2 t)}\\
&+ A_3e^{2[(\alpha_1+\alpha_2)n-(\beta_1+\beta_2)t]}
\end{aligned}
$$

求它的双孤立子解.

提示：　$\beta_1=\sinh\alpha_1$，　$\beta_2=\sinh\alpha_2$，

$$
\frac{A_3}{A_1A_2}=-\frac{(\beta_1-\beta_2)^2-\sinh^2(\alpha_1-\alpha_2)}{(\beta_1+\beta_2)^2-\sinh^2(\alpha_1+\alpha_2)}
$$

$$\alpha^2 \equiv \left(\frac{\sinh\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{\sinh\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\right)^2 = \frac{\sinh^2(\alpha_1-\alpha_2)-(\sinh\alpha_1-\sinh\alpha_2)^2}{(\sinh\alpha_1+\sinh\alpha_2)^2-\sinh^2(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\beta^2 \equiv \left(\frac{\cosh\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{\cosh\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\right)^2 = \frac{\sinh^2(\alpha_1-\alpha_2)-(\sinh\alpha_1+\sinh\alpha_2)^2}{(\sinh\alpha_1-\sinh\alpha_2)^2-\sinh^2(\alpha_1+\alpha_2)}$$

2.11　用两边取对数的方法求解下列差分方程

(1) $x_{n+1}=x_n^2$

(2) $x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}^2}{x_n}$

2.12　用变换方法求解下列差分方程

(1) $x_{n+1}=2x_n^2-1$　($|x_0|\leqslant 1$，令 $x_n=\cos t_n$；$|x_0|\geqslant 1$，令 $x_n=\cosh t_n$)

(2) $x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$　$\left(令\ x_n=\dfrac{1}{2}(1-y_n)\right)$

(3) $x_{n+1}=x_n(4x_n^2-3x_n)$　$(-1\leqslant x_n\leqslant 1)$　(令 $x_n=\cos t_n$)

(4) $x_{n+1}=16x_n\left(1-2\sqrt{x_n}+x_n\right)$　$(0\leqslant x_n\leqslant 1)$　(令 $x_n=\sin^4 t_n$)

(5) $x_{n+1}=\sqrt{2}\,x_n(1-x_n^4)^{1/4}$　$(0\leqslant x_n\leqslant 1)$　(令 $x_n^2=\sin t_n$)

(6) $x_{n+1}=16x_n^3-24x_n^2+9x_n$　$(0\leqslant x_n\leqslant 1)$　$\left(令\ x_n=\dfrac{1}{2}(1+\sin t_n)\right)$

(7) $x_{n+1}=(2x_n^{2/3}-1)^3$　$(-1\leqslant x_n\leqslant 1)$　(令 $x_n=\cos^3 t_n$)

(8) $x_{n+1}=(2x_n^6-1)^{1/3}$　$(-1\leqslant x_n\leqslant 1)$　(令 $x_n^3=\cos t_n$)

2.13　验证

(1) $$x_{n+1}=\begin{cases}4x_n & (0\leqslant x_n\leqslant 1/4)\\ 2(1-2x_n) & (1/4\leqslant x_n\leqslant 1/2)\\ 2(2x_n-1) & (1/2\leqslant x_n\leqslant 3/4)\\ 4(1-x_n) & (3/4\leqslant x_n\leqslant 1)\end{cases}$$

有解 $x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\cos(4^n\pi x_0))$

(2) $x_{n+1}=\begin{cases}3x_n & (0\leqslant x_n\leqslant 1/3)\\ 2-3x_n & (1/3\leqslant x_n\leqslant 2/3)\\ -2+3x_n & (2/3\leqslant x_n\leqslant 1)\end{cases}$

有解 $x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\cos(3^n\pi x_0))$

第 3 章　非线性方程的定性分析

第 2 章我们给出了一些经典的非线性方程的解. 本章从一些物理学中出现的具体的非线性方程出发,着重对这些方程作定性分析,从分析中简述在非线性动力学中常用的一些概念,如:平衡态、稳定性、分岔、突变、极限环、吸引子和混沌等.

3.1　Logistic 方程

在(1.1.17)式中已经标记过的 Logistic 方程为

$$\frac{dn}{dt} = an - bn^2 \quad (a > 0, b > 0) \tag{3.1.1}$$

它是一个生态模式,其中 $n(t)$ 为某种生物群体的数目,它随时间的变化决定于其自身的繁殖能力(方程右端第一项)和环境的影响(方程右端第二项).

在无环境限制时,$b=0$,Logistic 方程(3.1.1)化为下列一阶线性方程:

$$\frac{dn}{dt} = an \tag{3.1.2}$$

它的解为

$$n(t) = n_0 e^{at} \tag{3.1.3}$$

其中 n_0 表示初始时刻的 n. (3.1.3)式表明:当环境没有限制时,某种生物种群的数目随时间将无限制地增长.

由于环境的影响,$b \neq 0$,生物种群的繁殖将受到抑制. 此时的 Logistic 方程(3.1.1)是 Riccati 方程. 不过,因 $r(x)=0$,它实质上是 Bernoulli 方程. 只要将方程(3.1.1)改写为

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n}+\frac{b}{a-bn}\right)\mathrm{d}n=\mathrm{d}t \tag{3.1.4}$$

就很容易求得

$$n(t)=\frac{n_0\mathrm{e}^{at}}{1-\frac{b}{a}n_0+\frac{b}{a}n_0\mathrm{e}^{at}} \tag{3.1.5}$$

这就是 Logistic 方程(3.1.1)满足初条件 $n(0)=n_0$ 的解析解. $n(t)$ 随 at 的变化见图 3-1. 图中下面一条曲线为 $n_0<\frac{a}{b}$ 的情况 $\left(n(t)<\frac{a}{b}\text{且}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}>0\right)$, 上面一条曲线为 $n_0>\frac{a}{b}$ 的情况, 此时的 n_0 记为 n_0' $\left(n(t)>\frac{a}{b}\text{且}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}<0\right)$.

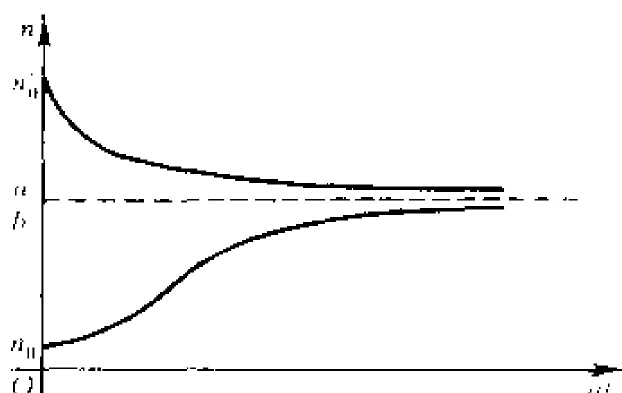


图 3-1

从(3.1.5)式可以求得:

$$\lim_{t\to+\infty} n(t)=\frac{a}{b} \tag{3.1.6}$$

根据方程(3.1.1)可知, 使得 $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=0$ 的定常状态解有两个

$$n_1^*=0,\quad n_2^*=\frac{a}{b}\equiv n_s \tag{3.1.7}$$

它们称为系统(3.1.1)的平衡态(equilibrium state). n_1^* 表示某生物种群自身的繁殖能力与环境限制两者都是零的情况; 而 n_2^* 表

两者平衡，使生物种群数目不再变化的情况.

在 $n_1^*=0$ 附近，方程(3.1.1)可近似表为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=an \tag{3.1.8}$$

$n(t)$随时间呈指数增长，该平衡态称为是不稳定的. 它表示当两者稍稍不平衡就会使 n 远离 $n_1^*=0$ 的状态.

在 $n_2^*=n_c$ 附近，方程(3.1.1)可近似表为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=-bn_c(n-n_c) \tag{3.1.9}$$

因而 $n-n_c$ 随时间呈指数减小. 该平衡态称为是稳定的. 它表示即使两者不平衡也会使 n 逐渐靠近 $n_c=\frac{a}{b}$ 的状态，而且 $t\to+\infty$，$n\to n_c$. 所以，在 $t\to+\infty$时，从 $n<n_c(\mathrm{d}n/\mathrm{d}t>0)$ 和 $n>n_c(\mathrm{d}n/\mathrm{d}t<0)$ 两个方向使 n 达到一个稳定的极限值 $n=n_c=a/b$. 它称为系统(3.1.1)的吸引子.

从上述分析看到，定常解或平衡态是否稳定取决于方程(3.1.1)的右端函数

$$F(n,a,b)\equiv an-bn^2 \tag{3.1.10}$$

对于 n 的变化率. 因为

$$\frac{\partial F}{\partial n}=a-2bn \tag{3.1.11}$$

则

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{n=n_1^*=0}=a>0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{n=n_2^*=\frac{a}{b}}=-a<0 \tag{3.1.12}$$

为了简化，(3.1.5)式可以改写为

$$n(t)=\begin{cases}n_c(1+me^{-at})^{-1} & (n_0\leqslant n_c)\\ n_c(1-me^{-at})^{-1} & (n_0\geqslant n_c)\end{cases} \tag{3.1.13}$$

其中

$$m = \left|\frac{n_c}{n_0} - 1\right| = \begin{cases} \dfrac{n_c}{n_0} - 1 & (n_0 \leqslant n_c) \\ 1 - \dfrac{n_c}{n_0} & (n_0 \geqslant n_c) \end{cases} \tag{3.1.14}$$

这样，若令

$$t_0 = \frac{1}{a}\ln|m| \tag{3.1.15}$$

则(3.1.13)式可改写为

$$n(t) = \begin{cases} \dfrac{n_c}{2}\left[1 + \tanh\dfrac{a}{2}(t - t_0)\right] & (n_0 \leqslant n_c) \\ \dfrac{n_c}{2}\left[1 + \coth\dfrac{a}{2}(t - t_0)\right] & (n_0 \geqslant n_c) \end{cases} \tag{3.1.16}$$

而且，由(3.1.16)式有

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dfrac{an_c}{4}\mathrm{sech}^2\dfrac{a}{2}(t - t_0) & (n_0 \leqslant n_c) \\ -\dfrac{an_c}{4}\mathrm{csch}^2\dfrac{a}{2}(t - t_0) & (n_0 \geqslant n_c) \end{cases} \tag{3.1.17}$$

3.2 Landau 方程

在(1.1.21)式中已经标记过的 Landau 方程为

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t} = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4 \quad (\sigma > 0, l > 0) \tag{3.2.1}$$

它是最早用来描写湍流发生的方程. 其中$|A|$是扰动振幅 A 的模，l 为 Landau 常数，σ 为线性增长率，它与$(Re - Rec)$成正比，即

$$\sigma = \omega(Re - Rec) \quad (\omega > 0) \tag{3.2.2}$$

其中 Re 和 Rec 分别为 Reynolds 数和临界 Reynolds 数.

Landau 方程(3.2.1)在形式上与 Logistic 方程(3.1.1)一样，属于 Riccati 方程或 Bernoulli 方程. 若设 A 的初值为 A_0，则 Landau 方程(3.2.1)的解为

$$|A|^2 = \frac{|A_0|^2 e^{2\sigma t}}{1 - \frac{l}{2\sigma}|A_0|^2 + \frac{l}{2\sigma}|A_0|^2 e^{2\sigma t}} \tag{3.2.3}$$

从(3.2.1)式看到，使得$\frac{d|A|^2}{dt}=0$的定常状态解为

$$|A|_1^* = 0, \quad |A|_2^* = \sqrt{\frac{2\sigma}{l}} \equiv A_c \tag{3.2.4}$$

而且$|A|_1^*=0$是不稳定的，$|A|_2^*=A_c$是稳定的. 同时，在$|A|_2^*=A_c$附近，从$|A|<A_c$和$|A|>A_c$两个方向都趋向于一个稳定的极限$|A|_c$，即

$$\lim_{t\to+\infty}|A| = A_c \equiv \sqrt{\frac{2\sigma}{l}} = \sqrt{\frac{2\omega}{l}} \cdot \sqrt{Re - Rec} \tag{3.2.5}$$

如果允许 Landau 方程(3.2.1)中的两个参数σ和l都可以改变符号的话，将会出现新的现象. 此时的定常状态解应为

$$\begin{cases} l > 0:\ |A|_1^* = 0 \quad (\sigma < 0);\ |A|_1^* = 0, |A|_2^* = A_c \quad (\sigma > 0) \\ l < 0:\ |A|_1^* = 0, |A|_2^* = A_c (\sigma < 0);\ |A|_1^* = 0 \quad (\sigma > 0) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

而且因为在$|A|_1^*=0$附近，Landau 方程(3.2.1)可近似表为

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 \tag{3.2.7}$$

在$|A|_2^*=A_c$附近，Landau 方程可近似表为

$$\frac{d|A|^2}{dt} = -l|A|_c^2(|A|^2 - A_c^2) \tag{3.2.8}$$

所以，当$l>0$时，定常解$|A|_1^*=0$在$\sigma<0$时是稳定的. 但$\sigma>0$时$|A|_1^*=0$就不稳定了，而且在$\sigma>0$时，又出现一个稳定的新定常解$|A|_2^*=A_c$. 即是说，当σ由$\sigma<0$变化到$\sigma>0$时，定常解$|A|_1^*=0$从稳定变为不稳定，而且分岔出一个稳定的解$|A|_2^*=A_c$，这就是分岔(bifurcation)现象，见图 3-2.

$l<0$时可作类似的分析.

这样，Landau 提出了一个湍流发生机制的猜想，认为湍流是

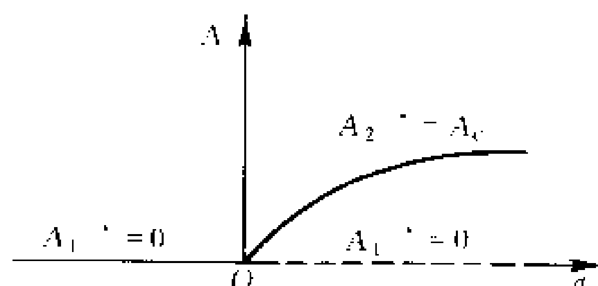


图 3-2

一系列不稳定分岔的结果．即当 $Re<Rec(\sigma<0)$时，$|A|_1^*=0$(代表层流)是稳定的，但当 $Re>Rec(\sigma>0)$后，$|A|_1^*=0$ 变为不稳定，表示层流失稳，而且出现了一个稳定的新解 $|A|_2^*=A_c$，它可以视为是一个周期为 T_1 的运动．若 Re 再增加，周期为 T_1 的运动到一定时刻会变为不稳定，同时会出现另一个周期为 T_2 的运动，而且 T_2 与 T_1 之比为无理数，如此不断，随着 Re 的进一步增加和相当多的 n 次分岔，就会出现由 n 个周期 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 共同组成的运动，它实际上就是没有固定周期的湍流运动．

与从(3.1.5)式化为(3.1.16)式相似，(3.2.3)式可以改写为

$$|A|^2=\begin{cases}\dfrac{A_c^2}{2}[1+\tanh\sigma(t-t_0)] & (|A_0|^2\leqslant A_c^2)\\[2ex] \dfrac{A_c^2}{2}[1+\coth\sigma(t-t_0)] & (|A_0|^2\geqslant A_c^2)\end{cases} \tag{3.2.9}$$

其中

$$t_0=\frac{1}{2\sigma}\ln\left|\frac{A_c^2}{|A_0|^2}-1\right| \tag{3.2.10}$$

3.3 Lotka-Volterra 方程

在(1.1.22)式中已经标记过的 Lotka-Volterra 方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = N_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2) & (\alpha_1, \beta_1 > 0) \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2(\alpha_2 - \beta_2 N_1) & (\alpha_2, \beta_2 > 0)
\end{cases}
\tag{3.3.1}
$$

它是两个生物群体捕食关系的一个模式，也是化学反应中两种物质浓度变化的一个模式．这里要求 $N_1>0$ 和 $N_2>0$.

Lotka Volterra 方程无法直接求解．但从方程(3.3.1)看到，使得$\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=0$ 的定常状态解为

$$
(N_1, N_2) = (N_1^*, N_2^*) = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \tag{3.3.2}
$$

我们考察在定常状态解下的微小变化，即令

$$
N_1 = N_1^* + N_1', \quad N_2 = N_2^* + N_2' \tag{3.3.3}
$$

其中 N_1'和 N_2'相对于 N_1^* 和 N_2^* 是小量．(3.3.3)式代入方程(3.3.1)，忽略 N_1'与 N_2'的乘积，则得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}N_1'}{\mathrm{d}t} = -\alpha_2 \dfrac{\beta_1}{\beta_2} N_2' \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}N_2'}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \dfrac{\beta_2}{\beta_1} N_1'
\end{cases}
\tag{3.3.4}
$$

方程组(3.3.4)通过消元很易得到

$$
\frac{\mathrm{d}^2 N_j'}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 N_j' = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{3.3.5}
$$

其中

$$
\omega_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \tag{3.3.6}
$$

方程(3.3.5)是振动方程，其特征值为纯虚数($\lambda = \pm\omega_0 \mathrm{i}$)，若设 $N_1'|_{t=0} = A$，$N_2'|_{t=0} = 0$，则由方程(3.3.5)求得

$$
\begin{cases}
N_1' = A\cos\omega_0 t \\[1ex]
N_2' = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \dfrac{\omega_0}{\alpha_2} A\sin\omega_0 t = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \dfrac{\alpha_1}{\omega_0} A\sin\omega_0 t
\end{cases}
\tag{3.3.7}
$$

由此便知：N_1'和 N_2'都随时间 t 作周期变化．这样，定常状态解

(3.3.2)称为线性 Lotka-Volterra 系统的中心.

即便对于非线性系统(3.3.1),若令

$$N_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} M_1, \quad N_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} M_2 \tag{3.3.8}$$

则它可以化为

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1 M_1 (1 - M_2) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2 M_2 (1 - M_1) \end{cases} \tag{3.3.9}$$

因而有

$$\frac{dM_2}{dM_1} = -\frac{\alpha_2 M_2 (1 - M_1)}{\alpha_1 M_1 (1 - M_2)} \tag{3.3.10}$$

(3.3.10)式不难化为

$$\frac{\alpha_1 (1 - M_2) dM_2}{M_2} = -\frac{\alpha_2 (1 - M_1) dM_1}{M_1} \tag{3.3.11}$$

方程(3.3.11)积分求得

$$\alpha_1 \ln M_2 + \alpha_2 \ln M_1 - \alpha_1 M_2 - \alpha_2 M_1 = \text{常数} \tag{3.3.12}$$

(3.3.8)式代入(3.3.12)式求得

$$f(N_1, N_2) = \text{常数} \tag{3.3.13}$$

其中

$$f(N_1, N_2) \equiv \alpha_1 \ln \frac{\beta_1}{\alpha_1} N_2 + \alpha_2 \ln \frac{\beta_2}{\alpha_2} N_1 - \beta_1 N_2 - \beta_2 N_1 \tag{3.3.14}$$

在点$(N_1^*, N_2^*) = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$,显然有

$$f(N_1^*, N_2^*) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{3.3.15}$$

而且有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial N_1}\right)_{(N_1^*, N_2^*)} = \left(\frac{\partial f}{\partial N_2}\right)_{(N_1^*, N_2^*)} = 0 \tag{3.3.16}$$

因此,在(N_1^*, N_2^*)处 f 有极小值.

在坐标平面(N_1, N_2)(称为相平面)上,方程(3.3.13)表征的

也是围绕定常解(N_1^*, N_2^*)的闭合曲线(称为相轨,这里是 f 的等值线). 因此,Lotka-Volterra 方程(3.3.1)在无非线性项时是非周期解,但加入非线性项后,它具有周期解.

3.4 无阻尼的单摆运动方程

在(1.1.23)式中已经标记过的无阻尼的单摆运动方程为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{3.4.1}$$

当角位移 θ 很小时,近似有 $\sin\theta = \theta$,方程(3.4.1)化为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \tag{3.4.2}$$

这是线性振动方程. 设初始单摆在下垂位置,给一微小扰动,使其振动到最大角位移 θ_0 见图 1-1(要满足方程(3.4.2),θ_0 也很小),它正好处于 $t=\frac{T}{4}$(T 为振动周期)的时刻,该时刻的速度为零. 因而,方程(3.4.2)满足上述条件的解为

$$\theta = \theta_0 \sin\omega_0 t \tag{3.4.3}$$

其振动周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.4.4}$$

若规定 $\theta=\theta_0$ 时的时刻为 $t=0$,则解(3.4.3)可改写为

$$\theta = \theta_0 \cos\omega_0 t \tag{3.4.5}$$

方程(3.4.2)可以改为下列自治系统

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\omega_0^2 \theta \end{cases} \tag{3.4.6}$$

其中 $\omega = \dot{\theta}$ 表角速度.

在相平面(θ,ω)上,自治系统的相轨满足

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\omega_0^2 \theta}{\omega} \tag{3.4.7}$$

积分上式求得

$$\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2 = H_0 \tag{3.4.8}$$

其中 H_0 为积分常数. 在相平面(θ,ω)上,(3.4.8)式是一个围绕中心点$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$的椭圆曲线. 由此可知：线性的单摆系统只有一种运动形态：周期运动.

对非线性单摆运动,方程(3.4.1)可以化为

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\omega_0^2\sin\theta\end{cases} \tag{3.4.9}$$

在相平面(θ,ω)上,它满足

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\omega_0^2\sin\theta}{\omega} \tag{3.4.10}$$

积分上式求得

$$\frac{1}{2}\omega^2 + \omega_0^2(1-\cos\theta) = H \tag{3.4.11}$$

其中 H 为积分常数. 由于 ω 是角速度,因而$\frac{1}{2}\omega^2$可视为单摆系统的动能 K；而系统的恢复力为$-\omega_0^2\sin\theta$, 克服此力所作的功$\int_0^\theta \omega_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \omega_0^2(1-\cos\theta)$ 即是系统的位能 V,即

$$K = \frac{1}{2}\omega^2, \quad V = \omega_0^2(1-\cos\theta) \tag{3.4.12}$$

这样,(3.4.11)式表征的就是能量守恒定律. H 就是总能量或 Hamilton 量. 相应,(3.4.9)式就改写为

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial \omega} \\ \dot{\omega} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}\end{cases} \tag{3.4.13}$$

因此,非线性单摆系统(3.4.1)是一个保守系统或 Hamilton 系统.

方程(3.4.9)的定常状态满足

$$\sin\theta = 0, \quad \omega = 0 \tag{3.4.14}$$

它可以确定单摆的平衡位置. 这样的平衡位置有三个：

$$(\theta^*,\omega^*) = (0,0),(-\pi,0),(\pi,0) \qquad (3.4.15)$$

从实际状态看，这样的平衡位置只有两个：一个是$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$，它是单摆下垂，摆球位于下方的位置，若给它以微小的位移，单摆作周期振荡，因而平衡位置$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$是稳定的，它是中心点；另一个是$(\theta^*,\omega^*)=(\pm\pi,0)$，这是单摆摆球位于最上方的位置，若给它以微小的位移，单摆不再在平衡位置附近振荡，而是旋转起来，因而平衡位置$(\theta^*,\omega^*)=(\pm\pi,0)$是不稳定的，它是鞍点.

从能量去分析，图 3-3 给出了势能 V 随 θ 的变化，从图看出，中心点$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$是势能的极小值点$\left(\text{该点 } V=0,\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=\omega_0^2\right)$，且总能量极小（该点 $H=0$）；相反，鞍点$(\theta^*,\omega^*)=(\pm\pi,0)$是势能的极大值点（该点 $V=2\omega_0^2$，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta=0$，$\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}\theta^2=-\omega_0^2$），且总能量极大（该点 $H=2\omega_0^2$）.

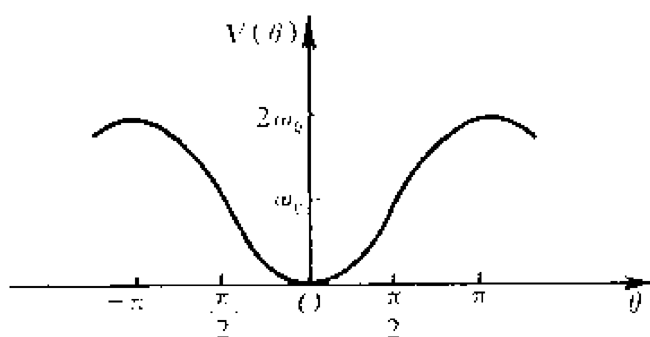


图 3-3

非线性单摆方程(3.4.1)可以准确求解，因 $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，则方程(3.4.11)可改写为

$$\dot{\theta}^2 + 4\omega_0^2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2H \qquad (3.4.16)$$

若令

$$H = 2\omega_0^2 k^2 \qquad (3.4.17)$$

这样，方程(3.4.16)可改写为

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2\left(k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (3.4.18)$$

下面分三种不同情况求解方程(3.4.18).

1. $H < 2\omega_0^2\left(k^2 \equiv \dfrac{H}{2\omega_0^2} < 1\right)$

这是单摆振动的情况. 因当 $\theta = \theta_0$ 时，$\dot{\theta} = 0$，则由(3.4.18)式有

$$k^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} \qquad (3.4.19)$$

对方程(3.4.18)，作变换

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi \quad \left(-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.4.20)$$

注意 $\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = k\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$，即 $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta = 2k\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$，这样，方程(3.4.18)化为

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2(1 - k^2\sin^2\varphi) \qquad (3.4.21)$$

因而

$$\omega_0\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \qquad (3.4.22)$$

上式两边从 $t=0(\varphi=0)$ 到 $t=t(\varphi=\varphi)$ 积分求得

$$\omega_0 t = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \qquad (3.4.23)$$

右端是第一类 Legendre 椭圆积分，其模数为 k. 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，相应 θ 从 0 变到 θ_0，单摆经历了周期的 1/4，则有

$$\omega_0 \cdot \frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \equiv \mathrm{K}(k) \qquad (3.4.24)$$

这里 $\mathrm{K}(k)$ 为第一类 Legendre 完全椭圆积分. 由此求得非线性单

摆振动的周期为

$$T=\frac{4\mathrm{K}(k)}{\omega_0} \tag{3.4.25}$$

它与线性单摆运动的周期公式(3.4.4)比较有

$$\frac{T}{T_0}=\frac{2\mathrm{K}(k)}{\pi} \tag{3.4.26}$$

$\frac{T}{T_0}$随 θ_0 的变化见图 3-4.

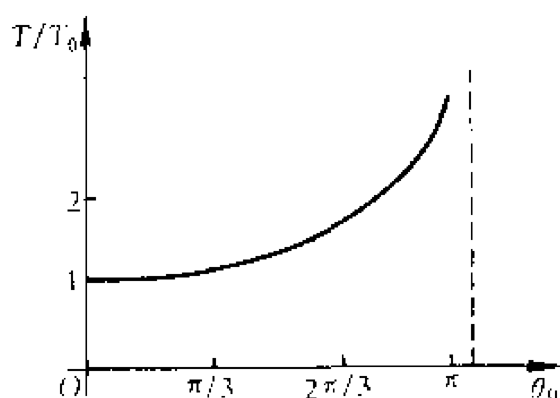


图 3-4

由图知：当 $\theta_0=0$ 时，$\frac{T}{T_0}=1$，随着 θ_0 的增加，$\frac{T}{T_0}$也增加，当 $\theta_0=\pi$ 时，$\frac{T}{T_0}\to\infty$.

在(3.4.23)式中，令

$$x=\sin\varphi \tag{3.4.27}$$

则它化为

$$\omega_0 t=\int_0^{\sin\varphi}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x \tag{3.4.28}$$

上式表明：积分值 $\omega_0 t$ 既可以作为积分上限 $\sin\varphi$ 的函数，也可以把积分上限 $\sin\varphi$ 视为积分值 $\omega_0 t$ 的函数，这就是 Jacobi 椭圆正弦函数. 因而

$$\sin\varphi = \mathrm{sn}(\omega_0 t, k) \tag{3.4.29}$$

上式代入(3.4.20)式，最后求得非线性的单摆运动方程(3.4.1)在 $k=\sin\frac{\theta_0}{2}<1$ 时的解析解为

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\mathrm{sn}(\omega_0 t, k) \quad \left(k = \sin\frac{\theta_0}{2} < 1\right) \tag{3.4.30}$$

当 $\theta_0 \to 0$ 时，$k \to 0$，$\mathrm{sn}(\omega_0 t, k) \to \sin(\theta/2)$，(3.4.30)式便退化为(3.4.3)式.

2. $H > 2\omega_0^2 \left(k^2 \equiv \frac{H}{2\omega_0^2} > 1\right)$

这是单摆旋转的情况，此时 $|\theta_0| > \pi$. 因现在 $k^2 > 1$，我们将方程(3.4.18)改写为

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2 k^2 \left(1 - k^{-2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.4.31}$$

若作变换

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\varphi \tag{3.4.32}$$

则方程(3.4.30)化为

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 k^2 (1 - k^{-2}\sin^2\varphi) \tag{3.4.33}$$

因而

$$\omega_0 k \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2 \sin^2\varphi}} \mathrm{d}\varphi \tag{3.4.34}$$

上式两边积分求得

$$\omega_0 k t = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2 \sin^2\varphi}} \mathrm{d}\varphi \tag{3.4.35}$$

此式右端仍是第一类 Legendre 椭圆积分，但模数为 $\frac{1}{k}$. 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，相应 θ 从 0 变到 π，单摆旋转了周期的 1/2，则有

$$\omega_0 k \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \equiv \mathrm{K}\left(\frac{1}{k}\right) \tag{3.4.36}$$

由此求得单摆旋转的周期为

$$T = \frac{2\mathrm{K}\left(\frac{1}{k}\right)}{\omega_0 k} \tag{3.4.37}$$

而此时单摆运动方程(3.4.1)的解析解为

$$\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{sn}\left(\omega_0 k t, \frac{1}{k}\right) \tag{3.4.38}$$

3. $H = 2\omega_0^2\left(k^2 \equiv \frac{H}{2\omega_0^2} = 1\right)$

这是介于振动与旋转之间的情况. 此时的方程(3.4.18)化为

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{3.4.39}$$

因而

$$2\omega_0\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta/2)} \tag{3.4.40}$$

上式两边积分求得

$$2\omega_0 t = \ln\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)} \tag{3.4.41}$$

由此求得

$$\sin\frac{\theta}{2} = \tanh\omega_0 t \tag{3.4.42}$$

这就是 $k=1$ 时单摆运动方程(3.4.1)的解析解. 这个解实际上也可以从(3.4.30)式或(3.4.38)式令 $k\to 1$ 求得.

由(3.4.42)式有

$$\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{sech}\,\omega_0 t \tag{3.4.43}$$

而且无论由(3.4.42)式还是(3.4.43)式都有 $t\to\pm\infty$, $\theta\to\pm\pi$, 因此, 周期为无穷大.

在相平面(θ,ω)上，单摆系统(3.4.9)的相轨如图 3-5 所示.

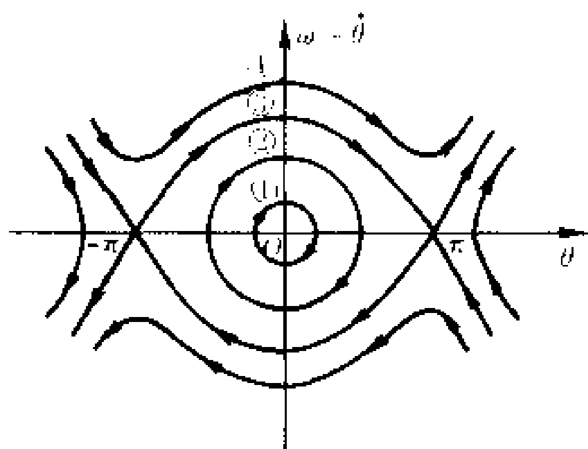


图 3-5

从图 3-5 看出，它有四种轨线：曲线①代表角位移很小时的周期振荡. 曲线②代表角位移较大时的非线性周期振荡. 曲线①和曲线②都是围绕中心点$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$的闭合曲线，它们通常可以用 Jacobi 椭圆函数表征. 曲线③代表角位移$\theta=\pm\pi$的单摆运动，它是连接两个鞍点$(\theta^*,\omega^*)=(-\pi,0)$和$(\pi,0)$，而且把振动和旋转分开的分型线，通常称为异宿轨道(heteroclinic orbit). 不过，这里$(-\pi,0)$和$(\pi,0)$实际为一个点，所以，此相轨为同宿轨道(homoclinic orbit)，它们通常可以用双曲正切或双曲正割函数表征. 曲线④代表单摆的旋转运动.

由上分析可知：单摆运动由线性变为非线性，其运动形态由单一的周期运动变为多样化的运动了.

3.5 有阻尼的单摆运动方程

在(1.1.25)式中已经标记过的有阻尼的单摆运动方程为

$$\ddot{\theta}+2\mu\dot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 \tag{3.5.1}$$

当角位移 θ 很小时，方程(3.5.1)化为

$$\ddot{\theta} + 2\mu\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{3.5.2}$$

这是线性阻尼振动方程. 其特征方程为

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.5.3}$$

相应的特征根为

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \tag{3.5.4}$$

它可以分为弱阻尼($\mu^2<\omega_0^2$)、强阻尼($\mu^2>\omega_0^2$)和临界阻尼($\mu^2=\omega_0^2$)三种情况说明.

弱阻尼时，λ 为共轭复根，在 $\theta|_{t=0}=0$ 的条件下，方程(3.5.2)的解为

$$\theta = \theta_0 e^{-\mu t}\sin\omega_1 t \quad (\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}) \tag{3.5.5}$$

它表征衰减振动. 在相平面(θ,ω)上，其相轨方程满足

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2\mu\omega - \omega_0^2\theta\end{cases} \tag{3.5.6}$$

其平衡位置为(θ^*,ω^*)=(0,0)，而且有

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{2\mu\omega + \omega_0^2\theta}{\omega} \tag{3.5.7}$$

由此求得总能量和它的变化率分别为

$$H \equiv \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2 = -2\mu\int_0^t \dot{\theta}^2 dt \tag{3.5.8}$$

$$\dot{H} \equiv \omega\dot{\omega} + \omega_0^2\theta\dot{\theta} = -2\mu\dot{\theta}^2 \tag{3.5.9}$$

由此可见，有阻尼的单摆运动总能量不再守恒. 在正阻尼时($\mu>0$)，总能量耗损($\dot{H}<0$)，即它是耗散系统，图3-5中的闭合轨线消失，而代之以向内旋转的对数螺线(见图3-6)，最终趋向于点(θ^*,ω^*)=(0,0)，它是稳定焦点，为阻尼单摆运动的吸引子(attrator). 它反映了有阻尼的单摆小球最终要回到下垂的平衡位置上，这是耗散系统中最简单的一类吸引子，又称为不动点吸引子或

定常吸引子．在负阻尼时($\mu<0$)，总能量增加($\dot{H}>0$)，单摆小球最终要远离下垂的平衡位置，此平衡点为不稳定焦点，为排斥子(repeller).

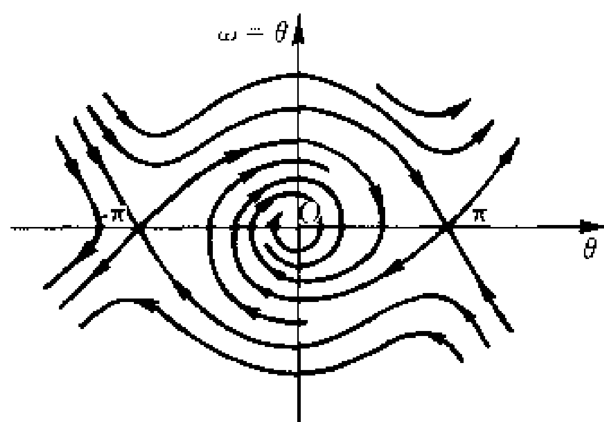


图 3-6

强阻尼时，λ 为二不等实根，在 $\theta|_{t=0}=0$ 的条件下，方程(3.5.2)的解为

$$\theta = \theta_0 e^{-\mu t}\sinh\omega_2 t \quad (\omega_2 = \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\ ) \qquad (3.5.10)$$

其中正阻尼($\mu>0$)，λ 全为负值，平衡位置$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$称为稳定结点；负阻尼($\mu<0$)，$\lambda$ 全为正值，平衡位置$(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$称为不稳定结点.

临界阻尼时，λ 为二相等实根，在 $\theta|_{t=0}=0$ 的条件下，方程(3.5.2)的解为

$$\theta = \theta_0 t e^{-\mu t} \qquad (3.5.11)$$

对非线性有阻尼的单摆运动，方程(3.5.1)可以化为

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega \\ \dot{\omega}=-2\mu\theta-\omega_0^2\sin\theta\end{cases} \qquad (3.5.12)$$

它不难化为

$$\ddot{\omega}+2\mu\dot{\omega}+(\omega_0^2\cos\theta)\omega=0 \qquad (3.5.13)$$

从(3.5.12)式看到，即便有了阻尼，但单摆的平衡位置与无阻尼时的一样，仍然是用(3.4.15)式表征的三个.

在 $\theta=0$ 附近，方程(3.5.13)化为

$$\ddot{\omega}+2\mu\dot{\omega}+\omega_0^2\omega=0 \tag{3.5.14}$$

其形式同方程(3.5.2). 因而与线性情况相同，在 $\mu^2<\omega_0^2$ 时，平衡点 $(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$ 为焦点，在 $\mu^2>\omega_0^2$ 时，平衡点 $(\theta^*,\omega^*)=(0,0)$ 为结点.

在 $\theta=\pm\pi$ 附近，方程(3.5.13)化为

$$\ddot{\omega}+2\mu\dot{\omega}-\omega_0^2\omega=0 \tag{3.5.15}$$

其特征根为 $\lambda=-\mu\pm\sqrt{\mu^2+\omega_0^2}$，它一正一负，因而平衡点 $(\theta^*,\omega^*)=(\pm\pi,0)$ 仍为鞍点.

由此可见，只要 $\mathrm{Re}\lambda\neq0$，非线性系统与它相应的线性系统的相轨在平衡点附近是相似的，它称为是拓扑轨道等价的，相轨见图 3-6.

3.6 Van der Pol 方程

在(1.1.26)式中已经标记过的 Van der Pol 方程为

$$\ddot{x}+2\mu\left(\frac{x^2}{a_c^2}-1\right)\dot{x}+\omega_0^2x=0 \quad (\mu>0) \tag{3.6.1}$$

它可以化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega_0^2x-2\mu\left(\dfrac{x^2}{a_c^2}-1\right)y\end{cases} \tag{3.6.2}$$

它只存在一个平衡位置

$$(x^*,y^*)=(0,0) \tag{3.6.3}$$

而在 $x=0$ 点附近，方程(3.6.2)可以化为

$$\ddot{x}-2\mu\dot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{3.6.4}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.6.5}$$

相应的特征根为

$$\lambda = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \tag{3.6.6}$$

因而在弱阻尼情况下($\mu^2<\omega_0^2$),λ为二共轭复根,且实部为正,平衡位置是一个不稳定的焦点.

由(3.6.2)式知,在相平面(x,y)上 Van der Pol 方程的相轨满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\omega_0^2 x + 2\mu(x^2/a_c^2 - 1)y}{y} \tag{3.6.7}$$

由此求得总能量和它的变化率分别为

$$H \equiv \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = -2\mu\int_0^t\left(\frac{x^2}{a_c^2} - 1\right)\dot{x}^2\mathrm{d}t \tag{3.6.8}$$

$$\dot{H} \equiv y\dot{y} + \omega_0^2 x\dot{x} = -2\mu\left(\frac{x^2}{a_c^2} - 1\right)\dot{x}^2 \tag{3.6.9}$$

由此可见,Van der Pol 方程的总能量不守恒,而且当$|x|<a_c$(负阻尼)时$\dot{H}>0$,当$|x|>a_c$(正阻尼)时$\dot{H}<0$. 即在运动过程中$\dot{H}$可以改变符号,这样,Van der Pol 方程可出现新的现象.

为了求解 Van der Pol 方程,我们先考察$\mu=0$的情况. 此时,方程(3.6.1)在$x|_{t=0}=0$条件下的解为

$$x = a\sin\omega_0 t \tag{3.6.10}$$

其中a为振幅. 因而

$$\dot{x} = \omega_0 a\cos\omega_0 t \tag{3.6.11}$$

因$\mu=0$时,Van der Pol 方程(3.6.1)为一守恒系统,其总能量为

$$H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = H|_{t=0} = \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2 \tag{3.6.12}$$

这样,(3.6.10)式和(3.6.11)式可分别写为

$$x = \sqrt{\frac{2H}{\omega_0}}\sin\omega_0 t \tag{3.6.13}$$

$$\dot{x} = \sqrt{2H}\cos\omega_0 t \tag{3.6.14}$$

对于 $\mu\neq 0$ 的情况，在弱耗散条件下，认为 H 和 a 都是 t 的缓变量，这样，考虑(3.6.13)式和(3.6.14)式，而设

$$x = \sqrt{\frac{2H(t)}{\omega_0}}\sin\omega_0 t \tag{3.6.15}$$

$$\dot{x} = \sqrt{2H(t)}\cos\omega_0 t \tag{3.6.16}$$

这里 $H(t)$是 t 的缓变函数.

(3.6.15)式和(3.6.16)式代入(3.6.9)式得到

$$\dot{H} = -4\mu\left[\frac{2H(t)\sin^2\omega_0 t}{\omega_0^2 a_c^2} - 1\right]H(t)\cos^2\omega_0 t \tag{3.6.17}$$

上式在一个周期 $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$内求平均，在右端积分时忽略 H 的变化，左端平均仍记为 $\dot{H}$，则得到

$$\dot{H} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\dot{H}\,\mathrm{d}t = -2\mu H\left(\frac{H}{H_0} - 1\right) \tag{3.6.18}$$

其中

$$H_0 = 2\omega_0^2 a_c^2 \tag{3.6.19}$$

由(3.6.18)式看到，使 $\dot{H}=0$ 的平衡位置有两个：

$$H_1^* = 0,\quad H_2^* = H_0 \tag{3.6.20}$$

在 $H_1^*=0$ 附近，(3.6.18)式近似化为

$$\dot{H} = 2\mu H \tag{3.6.21}$$

因而 $\dot{H}>0$，运动不稳定，$H_1^*=0$ 便是不稳定焦点. 因 $H_1^*=0$ 就是点$(x^*,y^*)=(0,0)$，所以，这种分析与(3.6.6)式的分析一致.

在 $H_2^*=H_0$ 附近，(3.6.18)式近似化为

$$\dot{H} = -2\mu H_0(H/H_0 - 1) = -2\mu(H - H_0) \tag{3.6.22}$$

则当 $H<H_0$ 时，$\dot{H}>0$；$H>H_0$ 时，$\dot{H}<0$. 这意味着，运动从 $H<H_0$ 和 $H>H_0$ 两边趋于 $H=H_0$. 因为 $H=H_0$ 就是

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = 2\omega_0^2 a_c^2 \tag{3.6.23}$$

即

$$\left(\frac{x}{2a_c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\omega_0 a_c}\right)^2 = 1 \tag{3.6.24}$$

在相平面(x,y)上，它是一个椭圆的闭合轨道，称为极限环(limit cycle)，而且是稳定的极限环，见图 3-7(a). 图中点$(x^*,y^*)=(0,0)$为不稳定焦点，也称为源点. 而闭合轨道 $H_2^*=H_0$ 为稳定的极限环. 若规定 $\mu<0$，则$(x^*,y^*)=(0,0)$为稳定焦点，也称为汇点，$H_2^*=H_0$ 为不稳定极限环，见图 3-7(b).

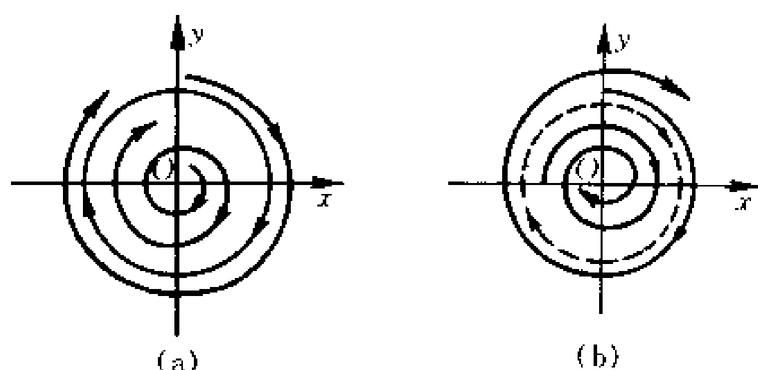


图 3-7

稳定的极限环是 Van der Pol 方程在弱阻尼和无其他强迫力作用下求得的孤立的周期解，它称为周期吸引子.

3.7 Duffing 方程

1. 无阻尼、无强迫的 Duffing 方程

已在(1.1.28)式中标记过的这种 Duffing 方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta_0^2 x^3 \tag{3.7.1}$$

它可以化为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y \\
\dot{y} = -\omega_0^2 x - \varepsilon\beta_0^2 x^3
\end{cases}
\tag{3.7.2}
$$

在相平面(x,y)上的相轨满足

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\omega_0^2 x + \varepsilon\beta_0^2 x^3}{y}
\tag{3.7.3}
$$

积分上式求得

$$
\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta_0^2 x^4 = H
\tag{3.7.4}
$$

其中 H 即为系统(3.7.1)的总能量. 这样,方程(3.7.2)可以化为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \\
\dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}
\end{cases}
\tag{3.7.5}
$$

所以,无阻尼、无强迫的 Duffing 方程与无阻尼的单摆运动一样是一个保守系统,它有周期解.

在 $\varepsilon>0$(硬非线性)时,将方程(3.7.1)与方程(2.3.91)比较知,Duffing 方程(3.7.1)的周期解为

$$
x = a\,\mathrm{cn}(\omega t, k)
\tag{3.7.6}
$$

其中

$$
\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\beta_0^2 a^2, \quad k^2 = \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{2\omega^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)
\tag{3.7.7}
$$

由此求得 $\varepsilon>0$ 时 Duffing 方程(3.7.1)的非线性振荡周期为

$$
T = \frac{4\mathrm{K}(k)}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \cdots\right]
\tag{3.7.8}
$$

由上式,若定义等效的线性振荡的圆频率为 ω^*,则由(3.7.8)式和(3.7.7)式有

$$
\begin{aligned}
\omega^* &\equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \cdots} = \omega\left(1 - \frac{1}{4}k^2 + O(k^4)\right) \\
&= \omega_0\left(1 + \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{2\omega_0^2} + O(\varepsilon^2 a^4)\right)\left(1 - \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{8\omega_0^2} + O(\varepsilon^2 a^4)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \omega_0 + \frac{3\varepsilon\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} + O(\varepsilon^2 a^4) \tag{3.7.9}$$

在 $\varepsilon<0$(软非线性)时,将方程(3.7.1)与方程(2.3.88)比较知,Duffing 方程(3.7.1)的周期解为

$$x = a\,\mathrm{sn}(\omega t, k) \tag{3.7.10}$$

其中

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\beta_0^2 a^2, \quad k^2 = \frac{-\frac{1}{2}\varepsilon\beta_0^2 a^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \tag{3.7.11}$$

同样求得 $\varepsilon<0$ 时 Duffing 方程(3.7.1)的非线性振荡周期为(3.7.8)式.因而

$$\begin{aligned}
\omega^* \equiv \frac{2\pi}{T} &= \omega\left(1 - \frac{1}{4}k^2 + O(k^4)\right) \\
&= \omega_0\left(1 + \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{4\omega_0^2} + O(\varepsilon^2 a^4)\right)\left(1 + \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{8\omega_0^2} + O(\varepsilon^2 a^4)\right) \\
&= \omega_0 + \frac{3\varepsilon\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} + O(\varepsilon^2 a^4)
\end{aligned} \tag{3.7.12}$$

其形式同(3.7.9)式.

2. 有阻尼、有强迫的 Duffing 方程

在(1.1.27)式中已标记过的这种 Duffing 方程为

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\beta_0^2 x^3 = A\cos\Omega t \quad (\mu > 0) \tag{3.7.13}$$

$\varepsilon=0$ 时,它化为线性方程,且在弱阻尼($\mu^2<\omega_0^2$)时求得解为

$$\begin{aligned}
x = &a_0 e^{-\mu t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}t + \theta_0) \\
&+ \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \delta)
\end{aligned} \tag{3.7.14}$$

其中 a_0 和 θ_0 为二任意常数,而 δ 满足

$$\tan\delta = -\frac{2\mu\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{3.7.15}$$

在时间足够长($\mu t\gg 1$)时,(3.7.14)式近似为

$$x = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta) \quad (3.7.16)$$

它表示随着强迫(或激励)振幅的增加,解(或响应)的振幅也随之增加.

在 $\varepsilon \neq 0$ 时,引入等效频率

$$\omega^* = \omega_0 + \frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} \varepsilon \quad (3.7.17)$$

则方程(3.7.13)可改写为

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^{*2} x = A\cos\Omega t \quad (3.7.18)$$

在 $\mu t \gg 1$ 时,它的解为

$$x = a\cos(\Omega t + \delta) \quad (3.7.19)$$

其振幅 a 满足

$$a^2 = \frac{A^2}{(\omega^{*2} - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2} \quad (3.7.20)$$

对于近共振的情况,设

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\Delta \quad (3.7.21)$$

在 $\Delta = 0$ 时,可以形成共振,使响应振幅达极大.在 $\Delta \neq 0$ 时,由于 $4\mu^2\Omega^2 \approx 4\mu^2\omega_0^2$,因而

$$(\omega^{*2} - \Omega^2)^2 = [(\omega^* - \Omega)(\omega^* + \Omega)]^2 \approx \left(\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\varepsilon - \varepsilon\Delta\right)^2 (2\omega_0)^2$$

$$= 4\omega_0^2\varepsilon^2\left(\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} - \Delta\right)^2 \quad (3.7.22)$$

这样就有

$$a^2 = \frac{(A^2/4\omega_0^2\varepsilon^2)}{(3\beta_0^2 a^2/8\omega_0 - \Delta)^2 + (\mu/\varepsilon)^2} \quad (3.7.23)$$

显然,如果 $a^2 = O(1)$,则要求 $A = O(\varepsilon)$,即要求激励振幅较小,即是软激励.若令

$$\sigma = \frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}, \quad F = \frac{3A^2}{32\omega_0^3\varepsilon^2} \quad (3.7.24)$$

则(3.7.23)式可以化为

$$\sigma[(\sigma-\Delta)^2+(\mu/\epsilon)^2]=F \tag{3.7.25}$$

这是 σ 的三次代数方程，实际上是 a^2 的三次代数方程. 由此可知：随着激励振幅（用 F 表示）的增加，响应振幅（用 σ 表示）随之增加，而且 σ 随 Δ 的变化会变成多值的，见图 3-8.

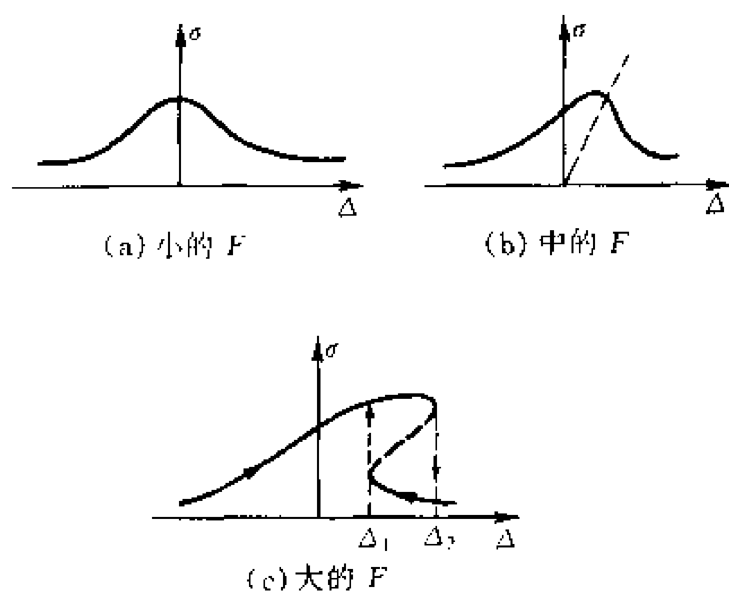


图 3-8

从图 3-8 看出：当 F 较大时，随着 Δ 的缓慢增加（相应，激励频率 Ω 也缓慢增加），振幅将增加一直到 $\Delta=\Delta_2$，但在该点振幅将跌到一个较小的值；相反，若 Δ 缓慢地减小（相应，Ω 也缓慢减小），振幅将缓慢增加，然后在 $\Delta=\Delta_1$ 振幅将跳到一个较大的值，这也称为跳跃现象. 这是一个重要的非线性现象，称之为突变（catastrophe），这是非线性作用所致.

非线性的另一个作用是：即使 Ω 与 ω_0 差别很大，也能产生共振.

由前面讨论知，强迫耗散的 Duffing 方程（3.7.13）的零级近似解在 $\mu t\gg 1$ 时可以写为

$$x^{(0)}=\frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\mu^2\Omega^2}}\cos(\Omega t+\delta) \tag{3.7.26}$$

其中 $\omega=\omega_0+O(\epsilon)$. 此时，若设

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \cdots \tag{3.7.27}$$

则由方程(3.7.13)知,一级近似解满足

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\mu\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\varepsilon\beta_0^2 x^{(0)^3} = -\frac{\varepsilon\beta_0^2[A\cos(\Omega t + \delta)]^3}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\varepsilon\beta_0^2 A^3}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2]^{3/2}} \times \left\{\frac{1}{4}\cos 3(\Omega t + \delta) + \frac{3}{4}\cos(\Omega t + \delta)\right\} \tag{3.7.28}$$

因为上述方程的右端存在 $\cos 3(\Omega t+\delta)$ 的强迫项,相应,$x^{(1)}$ 必有形式为 $b\cos 3(\Omega t+\gamma)$ 的特解(b,γ 为常数). 这样固有频率 $\omega_0=3\Omega$ 就要出现共振. 此时,$x^{(1)}$ 仍是一周期运动,但其周期 $T=\frac{2\pi}{3\Omega}$ 是激励周期 $\frac{2\pi}{\Omega}$ 的 1/3,它称为超谐共振或分周期.

类似,由于非线性作用,在方程右端也会出现诸如 $\cos\frac{1}{3}(\Omega t+\delta)$ 的一些项. 这样,只要有 $\omega_0=\frac{1}{3}\Omega$ 也会出现共振,而此时的周期 $T=\frac{2\pi}{\Omega/3}=3\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$ 是激励周期 $\frac{2\pi}{\Omega}$ 的 3 倍,它称为次谐共振或倍周期运动.

一般,$\omega_0=n\Omega(n=1,2,\cdots)$ 称为超谐共振,$\omega_0=\frac{1}{n}\Omega(n=1,2,\cdots)$ 称为次谐共振.

如果响应是激励周期整数倍的倍周期运动,那么,由于倍周期运动倍数的极大增加必然会出现非周期运动,从而可以形成混沌(chaos). 事实上,若令

$$z = \Omega t \tag{3.7.29}$$

Duffing 方程(3.7.13)可以化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \varepsilon\beta_0^2 x^3 + A\cos z \\ \dot{z} = \Omega \end{cases} \tag{3.7.30}$$

这是一个三个因变量的自治耗散系统，这是出现混沌所必须的最低阶的自治系统(autonomous system).

习 题 3

3.1 求下列自治系统的定常解并分析它的稳定性

(1) $\dot{x}=x(\mu-x^2)$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=\sin x\\ \dot{y}=-\sin y\end{cases}$

(3) $\ddot{x}+x-x^3=0$ (4) $\ddot{x}-x+x^3=0$

3.2 求下列自治系统的定常解，并应用平面极坐标系($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}$, $r^2\dot{\theta}=x\dot{y}-y\dot{x}$)分析极限环

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x[\mu-(x^2+y^2)]\\ \dot{y}=x+y[\mu-(x^2+y^2)]\end{cases}$ $(\mu>0)$

(2) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x(\sqrt{\mu}-\sqrt{x^2+y^2})^2\\ \dot{y}=x+y(\sqrt{\mu}-\sqrt{x^2+y^2})^2\end{cases}$ $(\mu>0)$

3.3 试确定下列方程的频率-振幅关系的头两项展开式

(1) $\ddot{x}+\omega_0^2\dfrac{x}{1+x^2}=0$ (2) $\ddot{x}+\omega_0^2x+\gamma x^5=0$

3.4 考察 Rayleigh 方程

$$\ddot{x}-\varepsilon\left(\dot{x}-\frac{1}{3}\dot{x}^3\right)+x=0$$

设 $\dot{x}=y$，试证明 y 满足 Van der Pol 方程

3.5 分析 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma(x-y)\\ \dot{y}=\mu x-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases}$$

(1) 求 $\mu<1$ 和 $\mu>1$ 时的平衡点

(2) 求特征根并说明平衡点的稳定性

(参见刘式适、刘式达的《非线性大气动力学》p. 129～136)

3.6 分析 Toomre 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=yz\\ \dot{y}=-2xz\\ \dot{z}=xy\end{cases}$$

(1) 证明 $x^2+y^2+z^2=$常数

(2) 求平衡点及其稳定性

第4章　试探函数法

非线性方程通常是很难求解的，有些非线性方程即便求出解析解，也是以隐函数形式出现，不便于应用.但非线性方程很多来自广泛的物理问题，本章力图在对非线性方程的物理问题分析的基础上，建立模型并应用某些初等函数作为非线性方程解的试探函数，从而获得一些非线性方程，主要是非线性常微分方程的近似解，这就是试探法.

4.1　指数试探函数

下面举几例说明.

例1　落石问题

在空气中下落的小石块或雨滴既受到重力的作用又受到阻力的作用.设小石块的质量为 m，速度为 v，重力加速度为 g，所受空气阻力假定与 v^2 成正比，则其运动方程可以写为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\mu v^2 \tag{4.1.1}$$

其中 μ 为阻尼系数.

设小石块在初始时刻是静止的，即初条件为

$$v(0)=0 \tag{4.1.2}$$

方程(4.1.1)为 Riccati 方程，它可以准确求解.满足初条件(4.1.2)的解为

$$v=\sqrt{\frac{mg}{\mu}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\mu g}{m}}t\right) \tag{4.1.3}$$

实际上，我们可以对落石问题作简单的物理分析.首先，初始

时刻 $v=0$，这样可知在下落初期主要受重力作用，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g>0$，即随时间 t 的增加，v 也迅速增加；其次，随着石块的下落和速度的增加，阻力的作用突出了，这样便使$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$的数值减小，到时间足够大时，重力与阻力平衡，而达到一个稳定的末速度

$$v_{\infty}=\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \tag{4.1.4}$$

基于上述分析，我们可以得到 v 随 t 变化的一条定性的曲线，见图 4-1.

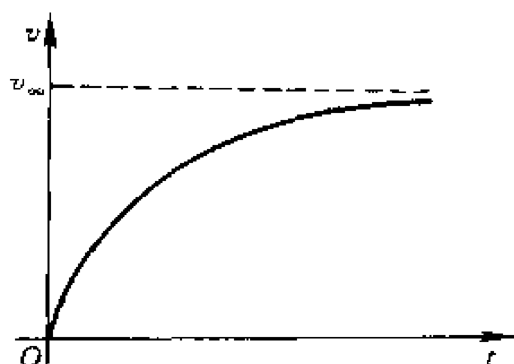


图 4-1

图 4-1 中的曲线是指数增加的曲线，所以，我们选择下列指数函数作为方程(4.1.1)解的试探函数，即选

$$v^{*}=v_{\infty}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) \tag{4.1.5}$$

其中 τ 称为时间常数. 对 τ 的估计是试探法求解的一个重要问题.

(4.1.5)式代入方程(4.1.1)得到

$$\frac{v_{\infty}}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}=g-g(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})^{2} \tag{4.1.6}$$

由于(4.1.5)式给出的是近似解，因此，(4.1.6)式是近似成立的，两边之差为

$$r(t) = \frac{v_\infty}{\tau} e^{-t/\tau} - g + g(1 - e^{-t/\tau})^2 \tag{4.1.7}$$

$r(t)$称为剩余函数. $r(t)$既随 t 变也随 τ 变. 物理上考虑到小石块在下落过程差不多是一半的时候,近似有 $v^* = \frac{1}{2}v_\infty$, $r(t) = 0$,所以,时间常数 τ 的选择通常要求

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2}, \quad r(t) = 0 \tag{4.1.8}$$

(4.1.8)式代入(4.1.7)式,求得时间常数为

$$\tau = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{\mu g}} \tag{4.1.9}$$

所以,方程(4.1.1)满足初条件(4.1.2)的解可近似表为

$$v = v_\infty\left[1 - \exp\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{m}}t\right)\right] \tag{4.1.10}$$

当然,这个解是不准确的,除了解本身以外,时间常数的选择也不准确. 通常,对于指数函数 e^x,选 $x = -1$,就认为差不多衰减到零了. 因此,对(4.1.5)式通常要求

$$v^* = v_\infty(1 - e^{-1}) \approx 0.63\, v_\infty \tag{4.1.11}$$

所以,对准确解(4.1.3),可取 $\tanh\left(\sqrt{\frac{\mu g}{m}}t\right) = 0.63$,从而定得

$$\tau = 0.745\sqrt{\frac{m}{\mu g}} \tag{4.1.12}$$

比较(4.1.12)式和(4.1.9)式,两者还比较接近.

例 2 双分子反应问题

分子 A 和分子 B 通过化学反应形成一个新的分子 C. 设在化学反应刚开始时,A 和 B 的分子数分别为 a 和 b(设 $a<b$),又设化学反应后 C 分子的数目为 n,则控制方程为

$$\frac{dn}{dt} = k(a - n)(b - n) \quad (a < b) \tag{4.1.13}$$

其中 k 为反应常数,$a-n$ 和 $b-n$ 分别表示通过化学反应保留的

A 分子和 B 分子的数目.

因化学反应刚开始时，还没有 C 分子形成，所以，问题的初条件为

$$n(0) = 0 \tag{4.1.14}$$

方程(4.1.13)也是一个 Riccati 方程. 它满足初条件(4.1.14)的准确解为

$$n = \frac{ab(1 - e^{-\sigma t})}{b - ae^{-\sigma t}} \quad (a < b) \tag{4.1.15}$$

其中

$$\sigma = kb(1 - a/b) \tag{4.1.16}$$

与落石问题一样，我们对双分子化学反应问题可作一简单分析. 首先，初始时刻 $n=0$，因而在反应初期，$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=kab>0$，即随时间 t 的增加，n 也迅速增加；其次，随着化学反应的进行，C 分子数的增加，使$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$的数值减小，到时间足够大时，所有的 A 分子已经用完，C 分子数不能再进一步增加，以致$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=0$，$n$ 达到一个稳定的值

$$n_{\infty} = a \tag{4.1.17}$$

所以，本问题的试探函数仍可以采用(4.1.5)式的形式，即令

$$n^* = a(1 - e^{-t/\tau}) \tag{4.1.18}$$

(4.1.18)式代入方程(4.1.13)得到

$$\frac{a}{\tau}e^{-t/\tau} = kae^{-t/\tau}(b - a + ae^{-t/\tau}) + r(t) \tag{4.1.19}$$

类似，时间常数 τ 和剩余函数 $r(t)$的选择满足(4.1.8)式，把它代入(4.1.19)式求得

$$\tau = \frac{1}{kb(1 - a/2b)} \tag{4.1.20}$$

所以，方程(4.1.13)满足初条件(4.1.14)的解可近似表为

$$n = a\{1 - \exp[-kb(1 - a/2b)t]\} \tag{4.1.21}$$

例 3 三分子化学反应问题

分子 A、分子 B 和分子 C 通过化学反应形成一个新的分子 D. 为了简单起见，设在化学反应刚开始时，A 的分子数为 a，B 和 C 的分子数都为 b(设 $a<b$)，又设化学反应后 D 分子的数目为 n，则控制方程为

$$\frac{dn}{dt}=k(a-n)(b-n)^2 \tag{4.1.22}$$

其中 k 为反应常数，问题的初条件仍为(4.1.14)式.

方程(4.1.22)是第一类 Abel 方程. 据(2.2.79)式，它满足初条件(4.1.14)的准确解为下列隐函数形式：

$$t=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-n}-\frac{n}{b}\right)+\frac{1}{(a-b)^2}\ln\left(\frac{1-n/b}{1-n/a}\right)\right] \tag{4.1.23}$$

与例 2 的分析相似，我们仍采用(4.1.18)式的试探函数，将它代入方程(4.1.22)得到

$$\frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}=kae^{-t/\tau}(b-a+ae^{-t/\tau})^2+r(t) \tag{4.1.24}$$

使它满足(4.1.8)式，求得

$$\tau=\frac{1}{kb^2(1-a/2b)^2} \tag{4.1.25}$$

所以，方程(4.1.22)满足初条件(4.1.14)的解可近似表为

$$n=a\{1-\exp[-kb^2(1-a/2b)^2t]\} \tag{4.1.26}$$

例 4　散热片问题

设在一个固定温度的热金属板上放置一个薄的矩形散热片，其长度为 l，宽度为 a，厚度为 $b(b\ll a)$. 它一方面通过热传导得到热量，另一方面通过与环境空气的对流损失热量. 设 x 沿散热片方向，在点 x 处散热片温度与环境空气温度之差为 θ，则在 x 附近的一个元长度 δx 内，通过热传导得到的加热率与 $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ 成正比，而通过对流损失的热量与 θ^n 成正比(n 可以从 1 到 $\frac{5}{4}$ 之间变化)，则控制方程可以写为

$$kab\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - 2ah\theta^n = 0 \tag{4.1.27}$$

其中 k 和 h 分别为热传导系数和热输送系数. 方程(4.1.27)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - c\theta^n = 0 \tag{4.1.28}$$

其中

$$c = \frac{2h}{kb} \tag{4.1.29}$$

只要 $n \neq 1$,方程(4.1.28)属于 Painleve 方程,且不能准确求解.

在散热片的一端($x=0$),温度 θ 固定为 θ_0,另一端($x=L$),只要 L 足够大,它应与环境空气取得同样的温度. 即边条件选为

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta(L) = 0 \quad (L\text{ 足够大}) \tag{4.1.30}$$

显然,散热片在 $x=0$ 处,θ 有最大值 θ_0;在 $x=L$ 处,θ 有最小值(为零). 而且,随着 x 从 $x=0$ 逐渐增大,温度开始下降较快,并逐渐趋于平稳下降.

基于上述分析,我们设试探函数为

$$\theta^* = \theta_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda} \tag{4.1.31}$$

λ 称为长度常数,其本质与时间常数一样.

(4.1.31)式代入方程(4.1.28)得到

$$\frac{1}{\lambda^2}\theta_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda} - c\theta_0^n(\mathrm{e}^{-x/\lambda})^n = r(x) \tag{4.1.32}$$

$r(x)$即是剩余函数. 类似(4.1.8)式,我们选择 λ 使得

$$\mathrm{e}^{-x/\lambda} = \frac{1}{2}, \quad r(x) = 0 \tag{4.1.33}$$

将它代入(4.1.32)式求得长度常数为

$$\lambda = c^{-1/2}(2/\theta_0)^{(n-1)/2} \tag{4.1.34}$$

所以,方程(4.1.28)近似满足边条件(4.1.30)的解为

$$\theta = \theta_0 \exp\{-c^{1/2}(2/\theta_0)^{-(n-1)/2}x\} \tag{4.1.35}$$

例 5 白热丝灯问题

设有一长为 l,直径为 d 的白热丝灯固定在两个厚厚的墙壁上. 设白热丝灯的电阻为 ρ,通过的电流为 I,它一方面通过电热丝加热得到热量,另一方面通过热传导和辐射散失热量. 设 x 为白热丝灯长度的方向,在点 x 处,长为 δx 的体积元 $\delta V=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\delta x$ 内的温度为 T,则其控制方程为

$$-k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+\frac{4\varepsilon\sigma}{d}T^4=\frac{16I^2\rho}{\pi^2d^4} \tag{4.1.36}$$

其中 k 和 ε 分别为热传导系数和放射系数,σ 为 Stefan-Boltzmann 常数. 方程(4.1.36)可以改写为

$$-\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+AT^4=B \tag{4.1.37}$$

其中

$$A=\frac{4\varepsilon\sigma}{kd},\quad B=\frac{16I^2\rho}{\pi^2kd^4} \tag{4.1.38}$$

方程(4.1.37)属于 Painleve 方程,且不能准确求解.

由于热传导的作用,我们取两端的温度为零,即边条件取为

$$T(0)=0,\quad T(l)=0 \tag{4.1.39}$$

考虑到白热丝灯很长,其中心部分不受传导冷却的影响,而维持一常定的温度

$$T_\infty=\left(\frac{B}{A}\right)^{1/4} \tag{4.1.40}$$

而两端温度缓慢下降. 正由于此,选择试探函数为

$$T^*=T_\infty(1-\mathrm{e}^{-x/\lambda}) \tag{4.1.41}$$

λ 为长度常数.

(4.1.41)式代入方程(4.1.37)得到

$$\frac{T_\infty}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-x/\lambda}+AT_\infty^4(1-\mathrm{e}^{-x/\lambda})^4=B+r(x) \tag{4.1.42}$$

选择 λ 满足条件(4.1.33)求得

$$\lambda=\sqrt{\frac{8}{15}}(AB^3)^{-1/8} \tag{4.1.43}$$

所以，方程(4.1.36)近似满足边条件(4.1.39)的解为

$$T = T_{\infty}\left\{1 - \exp\left[-\sqrt{\frac{15}{8}}(AB^{3})^{1/8}x\right]\right\} \tag{4.1.44}$$

4.2 抛物线试探函数

我们就以单摆运动方程

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \tag{4.2.1}$$

为例来说明.

在$\frac{H}{2\omega_0^2}<1$的单摆振动的情况，如选择单摆到最大角度$\theta=\theta_0$的时刻为$t=0$，此时的速度为零，则初条件应为

$$\theta(0) = \theta_0,\quad \dot{\theta}(0) = 0 \tag{4.2.2}$$

在线性条件下，满足上述初条件的解就是(3.4.5)式，即

$$\theta = \theta_0\cos\omega_0 t \tag{4.2.3}$$

在非线性条件下，可以画出在$-\frac{T}{4}\leqslant t\leqslant\frac{T}{4}$($T$为振动周期)内，$\theta$随时间$t$的变化示意图，如图4-2所示.

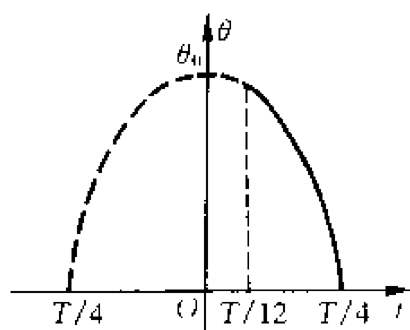


图 4-2

基于前面的分析并考虑到初条件(4.2.2)，我们选试探函数为抛物线，即

$$\theta^* = \theta_0[1 - (4t/T)^2] \tag{4.2.4}$$

类似于时间常数 τ，这里 T 的选择是一个重要的问题.

(4.2.4)式代入方程(4.2.1)得到

$$-\frac{32\theta_0}{T^2} + \omega_0^2 \sin\left\{\theta_0\left[1 - \left(\frac{4t}{T}\right)^2\right]\right\} = r(t) \tag{4.2.5}$$

考虑到单摆从最大振幅 $\theta=\theta_0$ 变化到 $\theta=0$ 需要时间 $\frac{T}{4}$. 在这个时间的 $\frac{1}{3}$ 时刻上，即 $t=\frac{T}{12}$ 时，发生转折，即通过该点，$\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ 的数值从较小转为较大. 因此，T 的选择通常要求

$$t = \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{T}{12}, \quad r(t) = 0 \tag{4.2.6}$$

(4.2.6)式代入(4.2.5)式求得单摆运行周期为

$$T = 4\omega_0^{-1} \cdot \sqrt{\frac{2\theta_0}{\sin\left(\frac{8}{9}\theta_0\right)}} \tag{4.2.7}$$

它与线性周期 $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 之比为

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2\theta_0}{\sin\left(\frac{8}{9}\theta_0\right)}} \tag{4.2.8}$$

它与(3.4.26)式比较知，这里用 $\sqrt{\frac{2\theta_0}{\sin\left(\frac{8}{9}\theta_0\right)}}$ 代替了 $K(k)$. 计算表明，用(4.2.8)式计算的 $\frac{T}{T_0}$ 与用(3.4.26)式计算的 $\frac{T}{T_0}$ 非常相近.

4.3 三角试探函数

在 3.6 节中分析过的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + 2\mu(x^2/a_c^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\mu > 0) \tag{4.3.1}$$

是很难准确求解的. 不过，我们已分析知道，它存在振幅为 $2a_c$ 的

周期解(极限环). 正由于此,我们设试探函数为

$$x^* = A\cos\omega t \tag{4.3.2}$$

(4.3.2)式代入方程(4.3.1),注意 $\cos^2\omega t\sin\omega t = \frac{1}{4}(\sin\omega t + \sin 3\omega t)$,则得到

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos\omega t - 2\mu\omega A\left[\frac{1}{4}\left(\frac{A}{a_c}\right)^2 - 1\right]\sin\omega t$$

$$-\frac{\mu}{2a_c^2}\omega A^3\sin 3\omega t = r(t) \tag{4.3.3}$$

因为在(4.3.2)式中存在两个参数: A 和 ω,而(4.3.3)式中存在两个最低频率的项(即包含 $\cos\omega t$ 和包含 $\sin\omega t$ 的两项),这样,我们选择 A 和 ω 使得(4.3.3)式中的高频项(即包含 $\sin 3\omega t$ 的项)忽略,并使 $r(t)=0$ 和 $\cos\omega t$ 及 $\sin\omega t$ 的系数为零. 因而求得

$$\omega = \omega_0, \quad A = 2a_c \tag{4.3.4}$$

所以,Van der Pol 方程(4.3.1)有周期解

$$x = 2a_c\cos\omega_0 t \tag{4.3.5}$$

这就是极限环. 下一章应用摄动法将更合理地得到这个极限环.

4.4 定常—小振荡试探函数

我们举两例来说明.

例 1 低黏流体黏性的测量问题

利用毛细管黏度计测量低黏流体的黏性. 在一个垂直放置的管内装入流体,可以根据流体所在高度 h 随时间 t 的变化,确定流体的运动学黏性系数 ν.

h 的控制方程为

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{5}{4}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + bh\frac{dh}{dt} + ch = d \tag{4.4.1}$$

其中 b、c 和 d 是常数.

但根据实验测得 h 随时间 t 的变化如图 4-3 所示.

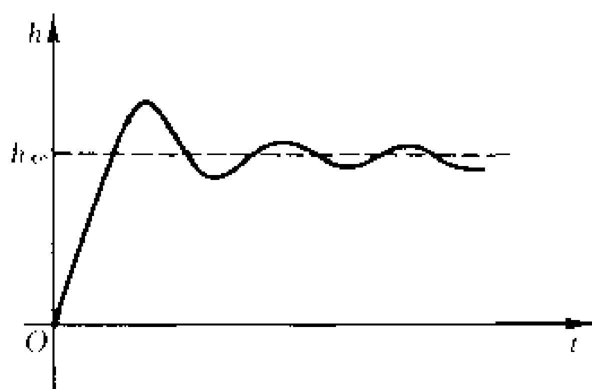


图 4-3

由图 4-3 看出：h 存在一个定常状态 h_∞，而且 h 围绕此定常状态作小振荡. 因此，我们设试探函数为

$$h = h_\infty + h' \tag{4.4.2}$$

其中 $h' \ll h_\infty$，而且 h_∞ 满足

$$ch_\infty = d \tag{4.4.3}$$

(4.4.2)式代入方程(4.4.1)得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 h'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{5}{4}\left(\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t}\right)^2 + bh_\infty \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t} + bh' \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t} + ch' = 0 \tag{4.4.4}$$

它仍然是一个非线性方程. 不过，我们认为其中的小振荡的二次乘积项 $\left(\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 和 $h'\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t}$ 是可以忽略的小项，则方程(4.4.4)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 h'}{\mathrm{d}t^2} + bh_\infty \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t} + ch' = 0 \tag{4.4.5}$$

这是线性阻尼振动方程. 在 $bh_\infty/2 < c$ 的条件下求得

$$h' = ae^{-\frac{bh_\infty}{2}t}\cos(\omega t + \delta) \tag{4.4.6}$$

其中 a 为振幅，δ 为初相位. 而振动圆频率 ω 满足

$$\omega^2 = c^2 - \left(\frac{bh_\infty}{2}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{b^2 h_\infty^2}{4c^2}\right) \tag{4.4.7}$$

这样，方程(4.4.1)的解可近似写为

$$h = h_\infty + a e^{-\frac{b h_\infty}{2} t} \cos(\omega t + \delta) \tag{4.4.8}$$

具体如何求黏性系数 ν 不在此讨论.

例 2 KdV-Burgers 方程的焦点附近解

KdV-Burgers 方程(1.2.7)的行波解满足方程(见(6.10.3)式)

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \nu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \beta \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} = A \tag{4.4.9}$$

从定性分析知：当 $0 < \nu^2 < 4\beta\sqrt{c^2+2A}$ 时，平衡位置 $u_1^* = c + \sqrt{c^2+2A}$ 为一焦点，因而解为围绕这个值作衰减振动.

由此分析，我们设试探函数为

$$u = u_1^* + u' \tag{4.4.10}$$

(4.4.10)式代入方程(4.4.9)，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u'}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\nu}{\beta}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{2\beta}u'^2 + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u' = 0 \tag{4.4.11}$$

将其中的小项 $\frac{1}{2\nu}u'^2$ 忽略，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u'}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\nu}{\beta}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u' = 0 \tag{4.4.12}$$

由此求得

$$u' = a_0 e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi} \cos k\xi \tag{4.4.13}$$

其中 a_0 为振幅，k 满足

$$k^2 = \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta} - \frac{\nu^2}{4\beta^2} \tag{4.4.14}$$

此问题的详细讨论见 6.10 节，此外还可见 6.9 节和 6.11 节.

最后应该指出：这里的定常—小振荡试探函数法实际上就是流体力学中的小扰动方法，它有着广泛的应用.

习 题 4

4.1 设有一半径为 a 的球，沉入流体中的深度为 h(从球的赤道起算)，达到平衡时球刚好一半沉入流体中(即 $h=a$)，给球上下扰动，此时 h 变化满足方程

$$\frac{d^2h}{dt^2}+\frac{3g}{2a}\left(h-\frac{h^3}{3a^2}\right)=0$$

其中 g 为重力加速度.

(1) 在 h 很小时，写出方程的近似形式，并求其圆频率

(2) 与方程(2.3.131)比较，求它的准确解

(3) 在 h 不大时，用三角试探函数求解

4.2 设有方程

$$\frac{du}{dt}=1-u^3$$

带有初条件 $u(0)=0$

(1) 证明 u 随 t 的变化类似于图 4-1

(2) 写出 u_∞

(3) 用指数试探函数求解，并说明剩余函数和时间常数

4.3 用指数试探函数求解

(1) $\frac{du}{dt}+au^n=0$, $u(0)=u_0$

(2) $\frac{du}{dt}+au^n=1$, $u(0)=0$

(3) $m\frac{dv}{dt}=mg-\mu v^{1.7}$, $v(0)=v_0$

(4) $m\frac{dv}{dx}=mg-\mu v^n$, $v(0)=v_0$, $v(\infty)=v_\infty$

(令 $mg=\mu v_\infty^n$)

4.4 用抛物线试探函数求解

(1) $-\frac{d^2\theta}{dx^2}+a\theta^n=b$, $\theta(0)=0$, $\theta(l)=0$

(2) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+cu^3=0$，　$u(0)=u_0$、　$u'(0)-0$

4.5　用三角试探函数求解

(1) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+cu^3=0$

(2) $\dfrac{d^2\theta}{dt^3}+\omega_0^2\sin\theta=0$

第5章　摄　动　法

摄动法是求解非线性方程的一种重要的方法.这种方法的第一步是在方程中引进无量纲的小参数 $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$;第二步是将方程的解展开为小参数 ε 的幂级数,从而可以依次求得方程的各级近似解;第三步是分析摄动级数的收敛性,它通常在自变量变得很大时不收敛,为了解决这个问题在经典的正规摄动法的基础上出现了许多奇异摄动法.

5.1　正规摄动法

考察下列包含小参数 ε 的两个未知函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的边值问题:

$$\begin{cases} xy' = y + \varepsilon z \\ xz' = -2z - yz \\ y(1) = 1, \quad z(1) = e^{-1} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 可以展为 ε 的幂级数:

$$\begin{cases} y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots \\ z = z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots \end{cases} \tag{5.1.2}$$

其中 $y_0, y_1, \cdots$ 和 $z_0, z_1, \cdots$ 分别代表 y 和 z 的零级近似,一级近似,$\cdots$.

将(5.1.2)式代入边值问题(5.1.1)得到

$$\begin{cases} x(y_0' + \varepsilon y_1' + \cdots) = (y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots) + \varepsilon(z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots) \\ x(z_0' + \varepsilon z_1' + \cdots) = -2(z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots) \\ \qquad\qquad - (y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots)(z_1 + \varepsilon z_1 + \cdots) \\ y_0(1) + \varepsilon y_1(1) + \cdots = 1, \quad z_0(1) + \varepsilon z_1(1) + \cdots = e^{-1} \end{cases} \tag{5.1.3}$$

由此求得它的零级近似和一级近似分别为

$$\begin{cases} xy_0' - y_0 = 0 \\ xz_0' + 2z_0 + y_0 z_0 = 0 \\ y_0(1) = 1, \quad z_0(1) = e^{-1} \end{cases} \tag{5.1.4}$$

和

$$\begin{cases} xy_1' - y_1 - z_0 = 0 \\ xz_1' + 2z_1 + z_0 y_1 + y_0 z_1 = 0 \\ y_1(1) = 0, \quad z_1(1) = 0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

零级近似问题(5.1.4)的解为

$$y_0 = x, \quad z_0 = \frac{e^{-x}}{x^2} \tag{5.1.6}$$

(5.1.6)式代入到一级近似问题(5.1.5)有

$$\begin{cases} xy_1' - y_1 - \dfrac{1}{x^2} e^{-x} = 0 \\ xz_1' + 2z_1 + \dfrac{1}{x^2} e^{-x} y_1 + xz_1 = 0 \\ y_1(1) = 0, \quad z_1(1) = 0 \end{cases} \tag{5.1.7}$$

一级近似问题(5.1.7)的解不难求得为

$$\begin{cases} y_1 = x\displaystyle\int_1^x t^{-4} e^{-t} dt \\ z_1 = \dfrac{1}{x^2} e^{-x} \displaystyle\int_1^x ds \int_1^s t^{-4} e^{-t} dt \end{cases} \tag{5.1.8}$$

这样，我们便用摄动法求得边值问题(5.1.1)的解为

$$\begin{cases} y = x\left[1 + \varepsilon \displaystyle\int_1^x t^{-4} e^{-t} dt\right] + O(\varepsilon^2) \\ z = \dfrac{e^{-x}}{x^2}\left[1 + \varepsilon \displaystyle\int_1^x ds \int_1^s t^{-4} e^{-t} dt\right] + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{5.1.9}$$

因为本问题在 $x=1$ 处，给出了 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的限制条件，而且在 y 和 z 中都有高度收敛的积分 $\int_1^x t^{-4} e^{-t} dt$，因而解(5.1.9)即便对很大的 x，右端第二项也是右端第一项的小修正. 因此，正规摄动法

对本问题是有效的.

但摄动法给的是关于 ε 的形式级数解. 最终只能将级数截断，取有限项作为问题的解. 那么，这样做是否对所有的自变量都一致成立呢？为此，我们考察 $e^{-\varepsilon t}$这样一个非常简单的函数. 因为

$$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2!}\varepsilon^2 t^2 - \cdots \tag{5.1.10}$$

是在 $-\infty < t < +\infty$ 内对所有的 t 都一致收敛的一个级数，但若把级数(5.1.10)截断，取前有限项作为 $e^{-\varepsilon t}$的近似值，那么，它就并非对所有的 t 都一致有效了. 如取 $e^{-\varepsilon t}$级数的头两项作为其近似值，则对于 $t=O(1)$是有效的，但对于 $t=O(\varepsilon^{-1})$就不再有效了，必须增加级数的项数. 若 t 再增加达到 $t=O(\varepsilon^{-2})$时，级数的项数还要大大增加. 所以，摄动解通常并非对所有的自变量都有一致有效地用前有限项作为近似解. 之所以如此，是因为在摄动解中存在与 $t, t^2, \cdots$成正比的久期项(Secular term)的缘故. 正由于此，出现了许多为了消除久期项而创立的奇异摄动法. 下面分别介绍.

5.2 多尺度方法

在 3.7 节中已经分析过的 Duffing 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta_0^2 x^3 \tag{5.2.1}$$

在 $\varepsilon>0$ 时的准确解为

$$x = a\text{cn}(\omega t, k) \tag{5.2.2}$$

它对任何 t 都是有界的，其中

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\beta_0^2 a^2, \quad k^2 = \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{2\omega^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \tag{5.2.3}$$

现在，我们在 $0<\varepsilon\ll 1$ 的条件下用摄动法求解它.

设 Duffing 方程(5.2.1)的解为

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots \tag{5.2.4}$$

其中 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 分别为 x 的零级、一级、二级、…近似.

(5.2.4)式代入方程(5.2.1)有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots) + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)$$

$$= -\varepsilon\beta_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)^3 \tag{5.2.5}$$

由此得到其零级和一级近似方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_0}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{5.2.6}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_1 = -\beta_0^2 x_0^3 \tag{5.2.7}$$

显然,零级近似方程(5.2.6)为一线性方程,其通解为

$$x_0 = a\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{5.2.8}$$

它实际上就是 Duffing 方程(5.2.1)在 $\varepsilon=0$ 时的解,其中 a 和 θ_0 为两个任意常数,分别代表零级近似解的振幅和初相位.

将(5.2.8)式代入方程(5.2.7)的右端,并注意 $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$,则得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_1 = -\frac{1}{4}\beta_0^2 a^3[\cos 3(\omega_0 t + \theta_0) + 3\cos(\omega_0 t + \theta_0)] \tag{5.2.9}$$

这个一级近似方程也为一线性方程,考虑到其齐次方程的解与(5.2.8)式形式一样,因而只求方程(5.2.9)的特解,这个特解不难求得为

$$x_1 = -\frac{3\beta_0^2}{8\omega_0}a^3 t\sin(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{\beta_0^2}{32\omega_0^2}a^3\cos 3(\omega_0 t + \theta_0) \tag{5.2.10}$$

这样,Duffing 方程(5.2.1)的摄动解可以表为

$$x = a\cos(\omega_0 t + \theta_0) + \varepsilon a^3\Big[-\frac{3\beta_0^2}{8\omega_0}t\sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$+\frac{\beta_0^2}{32\omega_0^2}\cos 3(\omega_0 t+\theta_0)\Big]+O(\varepsilon^2) \qquad (5.2.11)$$

由于在一级近似解中存在$-\frac{3\beta_0^2}{8\omega_0}a^3 t\sin(\omega_0 t+\theta_0)$形式的久期项，所以，(5.2.11)式的截断解不能对所有的 t 一致有效. 而这种久期项的产生是由于在一级近似方程(5.2.9)右端有 $\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ 一项，它的频率与齐次方程的基频 ω_0 相同，形成共振所致.

事实上，从准确解(5.2.2)式看到，它是对所有的 t 都是有界的，由此说明应用正规摄动法不适于求解 Duffing 方程(5.2.1).

从 Duffing 方程(5.2.1)所反映的非线性振荡的物理意义来分析，由于它存在非线性的恢复力，使得这种非线性振荡本身存在不同的时间尺度. 通常，由于非线性形成的不同频率振荡的相互作用，使得振荡的振幅随时间是慢变的，同样，初相位也随时间是慢变的，但相位则随时间是快变的. 而且从等效圆频率的表达式(3.7.9)看到，它一方面与线性振荡的圆频率 ω_0 有关，另一方面它又与振幅 a 有关. 正由于此，为了用摄动法求解 Duffing 方程，必须引入多种时间尺度，这就出现了多尺度方法.

多尺度方法的第一步是引进多尺度变量：

$$T_0=t,\quad T_1=\varepsilon t,\quad T_2=\varepsilon^2 t,\quad \cdots,\quad T_n=\varepsilon^n t \qquad (5.2.12)$$

因为 $T_1=\varepsilon t$ 和 $x_1=\cos T_1=\cos\varepsilon t$ 随 t 的变化分别比 $T_0=t$ 和 $x_0=\cos T_0=\cos t$ 随 t 的变化要慢，因而 $T_1=\varepsilon t$ 等均称为慢变坐标.

多尺度方法的第二步是假设未知函数 x 不仅依赖于 ε 和 t，而且也依赖于 $T_1,T_2,\cdots,T_n$. 这样，x 的摄动展开式应为

$$x=x_0(T_0,T_1,\cdots,T_n)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,\cdots,T_n)+\cdots \qquad (5.2.13)$$

由于 x 的各级近似均依赖于 $T_0,T_1,\cdots$和 T_n，因而在方程中出现的关于时间的导数应为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots+\varepsilon^n\frac{\partial}{\partial T_n} \qquad (5.2.14)$$

这可以认为是多尺度方法的第三步. 这一步意味着多尺度方法不仅将解按 ε 的幂级数展开,而且将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 也按 ε 的幂级数的前 n 项作了展开. 正由于此,多尺度方法又称为导数展开法(derivative expansion method).

将(5.2.13)式和(5.2.14)式代入 Duffing 方程(5.2.1)有

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\cdots+\varepsilon^n\frac{\partial}{\partial T_n}\right)^2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)$$
$$+\omega_0^2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)$$
$$=-\varepsilon\beta_0^2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^3 \qquad (5.2.15)$$

由此得到其零级近似和一级近似方程分别为

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2}+\omega_0^2 x_0=0 \qquad (5.2.16)$$

和

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+\omega_0^2 x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_1}-\beta_0^2 x_0^3 \qquad (5.2.17)$$

显然,零级近似方程(5.2.16)的通解为

$$x_0=a(T_1,T_2,\cdots,T_n)\cos[\omega_0 T_0+\theta_0(T_1,T_2,\cdots,T_n)] \qquad (5.2.18)$$

由此看到,x_0 的振幅 a 和初相位 θ_0 只随 $T_1,T_2,\cdots$ 和 T_n 变化,而相位可以随 T_0 变化,因此,a 和 θ_0 是慢变的,而相位是快变的.

将(5.2.18)式代入方程(5.2.17)的右端,则方程(5.2.17)化为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+\omega_0^2 x_1=2\omega_0\frac{\partial a}{\partial T_1}\sin(\omega_0 T_0+\theta_0)$$
$$+\left(2\omega_0 a\frac{\partial\theta_0}{\partial T_1}-\frac{3}{4}\beta_0^2 a^3\right)\cos(\omega_0 T_0+\theta_0)$$
$$-\frac{1}{4}\beta_0^2 a^3\cos3(\omega_0 T_0+\theta_0) \qquad (5.2.19)$$

比较方程(5.2.19)的右端与方程(5.2.9)的右端可以发现,在方程

(5.2.9)的右端诱发久期项的 $\cos(\omega_0 t+\theta_0)$ 的前面是一个非零的系数，而在方程(5.2.19)的右端诱发久期项的 $\sin(\omega_0 T_0+\theta_0)$ 和 $\cos(\omega_0 T_0+\theta_0)$ 的前面分别是一个可以使其为零的系数. 所以，为了消除久期项，可令

$$\frac{\partial a}{\partial T_1}=0,\quad 2\omega_0 a\frac{\partial \theta_0}{\partial T_1}-\frac{3}{4}\beta_0^2 a^3=0 \qquad (5.2.20)$$

这称为非久期条件(condition for nonsecularity). 它告诉我们：振幅 a 不仅与 T_0 无关，而且也与 T_1 无关，即是说，它仅与 $T_2,\cdots,T_n$ 有关，从而随时间更是慢变的. 同时，由(5.2.20)的第二式求得 θ_0 随时间慢变的具体形式为

$$\theta_0=\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}T_1+\theta'(T_2,\cdots,T_n)=\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\varepsilon t+\theta'(T_2,\cdots,T_n) \qquad (5.2.21)$$

其中 $\theta'(T_2,\cdots,T_n)$ 对 T_1 而言是积分常数.

有了非久期条件(5.2.20)，一级近似方程(5.2.19)可以改写为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+\omega_0^2 x_1=-\frac{1}{4}\beta_0^2 a^3\cos 3(\omega_0 t+\theta_0) \qquad (5.2.22)$$

它的特解为

$$x_1=\frac{\beta_0^2}{32\omega_0^2}a^3\cos 3(\omega_0 T_0+\theta_0) \qquad (5.2.23)$$

(5.2.23)式与(5.2.10)式比较，在这里消除了久期项. 这样，我们应用多尺度方法求得了 Duffing 方程(5.2.1)的摄动解为

$$x=a(T_2,\cdots,T_n)\cos\theta+\frac{\varepsilon\beta_0^2}{32\omega_0^2}a^3\cos 3\theta+O(\varepsilon^2) \qquad (5.2.24)$$

其中相位函数为

$$\theta=\omega_0 T_0+\theta_0=\left(\omega_0+\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\varepsilon\right)t+\theta' \qquad (5.2.25)$$

这里，t 前的系数与(3.7.9)式表征的等效圆频率完全一样. 我们注意到在多尺度方法中，实际上将圆频率也作了摄动展开，这就导致了下节介绍的 PLK 方法.

我们在 3.6 节分析过的 Van der Pol 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\left(\frac{x^2}{a_c^2} - 1\right)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5.2.26}$$

所出现的极限环现象也可以通过多尺度方法获得. 为此，在弱阻尼($\mu^2<\omega_0^2$)条件下引入小参数

$$\varepsilon = 2\mu/\omega_0 \tag{5.2.27}$$

这样，Van der Pol 方程(5.2.26)化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{a_c^2}\right)\omega_0\frac{dx}{dt} \tag{5.2.28}$$

(5.2.13)式和(5.2.14)式代入方程(5.2.28)有

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\cdots+\varepsilon^n\frac{\partial}{\partial T_n}\right)^2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)+\omega_0^2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)$$
$$=\varepsilon\left[1-\frac{(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^2}{a_c^2}\right]\omega_0\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\cdots+\varepsilon^n\frac{\partial}{\partial T_n}\right) \tag{5.2.29}$$

其零级近似和一级近似方程分别为

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{5.2.30}$$

和

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} + \omega_0^2 x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_1} + \left(1 - \frac{x_0^2}{a_c^2}\right)\omega_0\frac{\partial x_0}{\partial T_0} \tag{5.2.31}$$

显然，零级近似方程(5.2.30)的通解为

$$x_0 = a(T_1,T_2,\cdots,T_n)\cos[\omega_0 T_0 + \theta_0(T_1,T_2,\cdots,T_n)] \tag{5.2.32}$$

(5.2.32)式代入一级近似方程(5.2.31)得到

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = \left[2\omega_0\frac{\partial a}{\partial T_1} - \omega_0^2 a\left(1 - \frac{a^2}{4a_c^2}\right)\right]\sin(\omega_0 T_0 + \theta_0)$$
$$+ 2\omega_0 a\frac{\partial\theta_0}{\partial T_1}\cos(\omega_0 T_0 + \theta_0) + \frac{\omega_0^2 a^3}{4a_c^2}\sin 3(\omega_0 T_0 + \theta_0) \tag{5.2.33}$$

从上式看到，这里的非久期条件为

$$2\omega_0 \frac{\partial a}{\partial T_1} - \omega_0^2 a\left(1 - \frac{a^2}{4a_c^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial T_1} = 0 \quad (5.2.34)$$

(5.2.34)的后一式表明：θ_0 不仅与 T_0 无关，而且也与 T_1 无关.(5.2.34)的前一式给出了零级近似的振幅 a 随 T_1 的变化规律，即

$$\frac{\partial a^2}{\partial T_1} - \omega_0 a^2 + \frac{\omega_0}{4a_c^2}a^4 = 0 \quad (5.2.35)$$

这是 a^2 关于 T_1 的 Bernoulli 方程，也可看做是 a^2 关于 T_1 的 Riccati 方程. 它满足初条件

$$a|_{t=0} = a_0 \quad (5.2.36)$$

的解为

$$a = \frac{2a_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{4a_c^2}{a_0^2} - 1\right)e^{-2\mu t}}} = \frac{a_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{4a_c^2}(e^{2\mu t} - 1)}}$$

$$(5.2.37)$$

这样，用多尺度方法求得 Van der Pol 方程(5.2.26)的摄动解为

$$x = a\cos(\omega_0 t + \theta_0) + O(\epsilon) \quad (5.2.38)$$

这是一个周期解. 因由(5.2.37)式有

$$\lim_{t \to +\infty} a = 2a_c \quad (5.2.39)$$

而且从(5.2.37)式知：当 $a_0 < 2a_c$ 时，a 随着 t 的增加而增加；当 $a_0 > 2a_c$ 时，a 随着 t 的增加而减小，所以存在一个半径为 $2a_c$ 的稳定的极限环. 这是只由 Van der Pol 方程的低级近似得到的.

5.3 PLK(Poincare-Lighthill-Kuo[①])方法

对含小参数 ϵ 的非线性常微分方程，如 Duffing 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\epsilon\beta_0^2 x^3 \quad (5.3.1)$$

---

① Kuo 是指郭永怀.

的求解,PLK 方法的第一步是引入新变量

$$\tau = \omega t \tag{5.3.2}$$

其中 ω 是 Duffing 方程非线性振荡的圆频率. 这样, Duffing 方程(5.3.1)化为

$$\omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta_0^2 x^3 \tag{5.3.3}$$

第二步是不仅将 x 作摄动展开

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \cdots \tag{5.3.4}$$

而且将 ω 也作摄动展开

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots \tag{5.3.5}$$

这样,将(5.3.4)式和(5.3.5)式代入方程(5.3.3)有

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots) + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)$$
$$= -\varepsilon\beta_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)^3 \tag{5.3.6}$$

由此求得其零级近似和一级近似方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_0}{\mathrm{d}\tau^2} + x_0 = 0 \tag{5.3.7}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}\tau^2} + x_1 = \frac{1}{\omega_0^2}(2\omega_0\omega_1 x_0 - \beta_0^2 x_0^3) \tag{5.3.8}$$

显然,零级近似方程(5.3.7)的通解为

$$x_0 = a\cos\theta, \quad \theta = \tau + \theta_0 = \omega t + \theta_0 \tag{5.3.9}$$

将(5.3.9)式代入方程(5.3.8)的右端,则方程(5.3.8)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}\tau^2} + x_1 = \frac{1}{\omega_0^2}\left[\left(2\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}\beta_0^2 a^2\right)a\cos\theta - \frac{1}{4}\beta_0^2 a^3\cos 3\theta\right] \tag{5.3.10}$$

从上式看到,这里的非久期条件为

$$2\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}\beta_0^2 a^2 = 0 \tag{5.3.11}$$

由此求得 ω 的一级近似为

$$\omega_1 = \frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} \tag{5.3.12}$$

而且方程(5.3.10)简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}\tau^2} + x_1 = -\frac{\beta_0^2}{4\omega_0^2} a^3 \cos 3\theta \tag{5.3.13}$$

它的特解为

$$x_1 = \frac{\beta_0^2}{32\omega_0^2} a^3 \cos 3\theta \tag{5.3.14}$$

所以,用 PLK 方法求得的 Duffing 方程(5.3.1)的摄动解为

$$x = a\cos(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon\beta_0^2}{32\omega_0^2} a^3 \cos 3(\omega t + \theta_0) + O(\varepsilon^2) \tag{5.3.15}$$

其中

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{5.3.16}$$

解(5.3.15)在形式上实质上与用多尺度方法求得的解(5.3.24)是一致的. 但 PLK 方法明确给出了 ω 的表达式.

PLK 方法也可以用来求解非线性偏微分方程. 例如,浅水波的 KdV 方程为

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3h'}{2H}\right)\frac{\partial h'}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} = 0 \quad \left(\beta = \frac{1}{6}c_0 H^2\right) \tag{5.3.17}$$

首先,我们令

$$\eta = h'/H \tag{5.3.18}$$

使方程(5.3.17)化为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3}{2}\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \tag{5.3.19}$$

其次,引进相位函数

$$\theta = kx - \omega t \tag{5.3.20}$$

这里 k 和 ω 分别为波数和圆频率. 这样,非线性偏微分方程

(5.3.19)就化成了下列非线性常微分方程：

$$(-\omega+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\theta}+\frac{3}{2}kc_0\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta}{\mathrm{d}\theta^3}=0 \quad (5.3.21)$$

为了应用 PLK 方法求解，我们设 h' 的振幅为 a，而选小参数为

$$\varepsilon=a/H \quad (5.3.22)$$

因为 η 是自由面的相对扰动高度，则 η 关于 ε 的摄动展开写为

$$\eta=\varepsilon\eta_1(\theta)+\varepsilon^2\eta_2(\theta)+\cdots \quad (5.3.23)$$

同时，圆频率 ω 的摄动展开写为

$$\omega=\omega_0(k)+\varepsilon\omega_1(k)+\varepsilon^2\omega_2(k)+\cdots \quad (5.3.24)$$

(5.3.23)式和(5.3.24)式代入方程(5.3.21)有

$$\begin{aligned}(-\omega_0+kc_0-\varepsilon\omega_1-\varepsilon^2\omega_2-\cdots)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots)\\+\frac{3}{2}kc_0(\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots)\\+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\theta^3}(\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots)=0\end{aligned} \quad (5.3.25)$$

其一级近似、二级近似、三级近似方程分别为

$$(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_1}{\mathrm{d}\theta^3}=0 \quad (5.3.26)$$

$$(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_2}{\mathrm{d}\theta^3}=\omega_1\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}-\frac{3}{2}kc_0\eta_1\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta} \quad (5.3.27)$$

$$\begin{aligned}(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_3}{\mathrm{d}\theta^3}\\=\omega_1\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}+\omega_2\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}-\frac{3}{2}kc_0\left(\eta_1\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}+\eta_2\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}\right)\end{aligned} \quad (5.3.28)$$

方程(5.3.26)是$\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}$关于 θ 的二阶振动方程. 由于 θ 是无量纲的，因而振动解要求

$$\frac{-\omega_0+kc_0}{\beta k^3}=1 \quad (5.3.29)$$

由此求得圆频率 ω 的零级近似为

$$\omega_0 = kc_0 - \beta k^3 \tag{5.3.30}$$

同时求得一级近似方程(5.3.26)的解为

$$\eta_1 = \cos\theta \tag{5.3.31}$$

(5.3.30)式和(5.3.31)式代入二级近似方程(5.3.27)得到

$$\beta k^3\left(\frac{\mathrm{d}^3\eta_2}{\mathrm{d}\theta^3} + \frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\omega_1\sin\theta + \frac{3}{4}kc_0\sin 2\theta \tag{5.3.32}$$

从上式看到,这里的非久期条件为

$$\omega_1 = 0 \tag{5.3.33}$$

这样,方程(5.3.32)简化为

$$\frac{\mathrm{d}^3\eta_2}{\mathrm{d}\theta^3} + \frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta} = \frac{3c_0}{4\beta k^2}\sin 2\theta \tag{5.3.34}$$

它的特解为

$$\eta_2 = \frac{c_0}{8\beta k^2}\cos 2\theta \tag{5.3.35}$$

(5.3.31)式、(5.3.33)式和(5.3.35)式代入三级近似方程(5.3.28)得到

$$\beta k^3\left(\frac{\mathrm{d}^3\eta_3}{\mathrm{d}\theta^3} + \frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\left(\omega_2 - \frac{3c_0^2}{32\beta k}\right)\sin\theta + \frac{qc_0^2}{32\beta k}\sin 3\theta \tag{5.3.36}$$

从上式看到,这里的非久期条件为

$$\omega_2 = \frac{3c_0^2}{32\beta k} \tag{5.3.37}$$

且方程(5.3.36)化简为

$$\frac{\mathrm{d}^3\eta_3}{\mathrm{d}\theta^3} + \frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\theta} = \frac{9c_0^2}{32\beta^2k^4}\sin 3\theta \tag{5.3.38}$$

它的特解为

$$\eta_3 = \frac{3c_0^2}{256\beta^2k^4}\cos 3\theta \tag{5.3.39}$$

这样,我们用 PLK 方法求得了浅水波 KdV 方程(5.3.17)的摄动

解为

$$\frac{h'}{H} = \epsilon\cos\theta + \frac{c_0}{8\beta k^2}\epsilon^2\cos 2\theta + \frac{3c_0^2}{256\beta^2 k^4}\epsilon^3\cos 3\theta + O(\epsilon^4) \tag{5.3.40}$$

注意 $\epsilon = \frac{a}{H}, \beta = \frac{1}{6}c_0 H^2$，则上式可改写为

$$h' = a\cos\theta + \frac{3}{4k^2 H^3}a^2\cos 2\theta + \frac{27}{64k^4 H^6}a^3\cos 3\theta + O(\epsilon^4) \tag{5.3.41}$$

而圆频率为

$$\begin{aligned}\omega &= kc_0 - \beta k^3 + \frac{3c_0^2}{32\beta k}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ &= kc_0\left(1 - \frac{1}{6}k^2 H^2 + \frac{9a^2}{16k^2 H^4}\right) + O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{5.3.42}$$

上式表明：非线性浅水波的圆频率不仅依赖于波数，而且依赖于振幅.

5.4 平均值方法

平均值方法与多尺度方法及 PLK 方法不同，它在形式上并不把问题的解对小参数 ϵ 作摄动展开，而是采取求平均的方法获得慢变振幅和初相位的变化规律. 我们仍以 Duffing 方程为例来说明.

平均值方法的第一步是令 $\frac{dx}{dt} = y$，而将 Duffing 方程(5.3.1)写为下列方程组的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x - \epsilon\beta_0^2 x^3\end{cases} \tag{5.4.1}$$

这是两个因变量的自治系统. 平均值方法的第二步是在 $\epsilon = 0$ 的条件下求出方程组的解. 对方程组(5.4.1)而言，它的解为

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ y = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{cases} \tag{5.4.2}$$

其中 a 和 θ_0 分别是振幅和初相位. 平均值方法的第三步是应用常数变易法，将 $\varepsilon=0$ 时解的两个任意常数 a 和 θ_0 都视为是时间 t 的慢变函数，而将 $\varepsilon\neq 0$ 时的解写为

$$\begin{cases} x = a(t)\cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \\ y = -\omega_0 a(t)\sin[\omega_0 t + \theta_0(t)] \end{cases} \tag{5.4.3}$$

然后代入方程组并在一个周期内求平均去确定 $a(t)$ 和 $\theta_0(t)$.

(5.4.3)式代入方程组(5.4.1)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_0 t+\theta_0) - a\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t}\sin(\omega_0 t+\theta_0) = 0 \\ -\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\sin(\omega_0 t+\theta_0) - a\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_0 t+\theta_0) = -\varepsilon\dfrac{\beta_0^2 a^3}{\omega_0}\cos^3(\omega_0 t+\theta_0) \end{cases} \tag{5.4.4}$$

它可以视为是 $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t}$ 的联立方程组. 联立可解得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\dfrac{\beta_0^2 a^3}{\omega_0}\cos^3(\omega_0 t + \theta_0)\sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\dfrac{\beta_0^2 a^2}{\omega_0}\cos^3(\omega_0 t + \theta_0)\cos(\omega_0 t + \theta_0) \end{cases} \tag{5.4.5}$$

由此已明显看出：a 和 θ_0 都是 t 的慢变函数. 而且，(5.4.5)式的右端是周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 的正余弦函数，这样，将(5.4.5)式在一个周期内求平均，其变化也是很小的，取平均时，右端的 a 和 θ_0 均视为常数，从而得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \varepsilon\dfrac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} \end{cases} \tag{5.4.6}$$

因此有

$$a = \text{常数}, \quad \theta_0 = \frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\varepsilon t + \theta' \tag{5.4.7}$$

而 Duffing 方程的解((5.4.3)的第一式)可以改写为

$$x = a\cos(\omega t + \theta') \tag{5.4.8}$$

其中

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} \tag{5.4.9}$$

这与多尺度方法和 PLK 方法的分析实际上是一致的.

5.5 KBM(Krylov-Bogoliubov-Mitropolski)方法

平均值方法在形式上没有将 x 展为 ε 的幂级数，为了改变这个缺陷，在平均值方法的基础上又建立了一个 KBM 方法.

我们仍以 Duffing 方程为例来说明. KBM 方法的第一步是将方程的解设为

$$x = a\cos\theta + \varepsilon x_1(a,\theta) + \varepsilon^2 x_2(a,\theta) + \cdots \tag{5.5.1}$$

其中 $x_1(a,\theta)$，$x_2(a,\theta)$，…都是关于 θ 的以 2π 为周期的周期函数. 其第二步是认为零级近似的振幅 a 和相位 θ 随时间的变化率 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 都是 a 的函数，且都可以展为 ε 的下列幂级数：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots \tag{5.5.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \cdots \tag{5.5.3}$$

(5.5.2)式表明 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 是慢变的，(5.5.3)式表明 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 相对是快变的，其零级近似是线性振动的圆频率，一级以上的圆频率均与 a 有关.

根据(5.5.2)式和(5.5.3)式，我们很易得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} = \left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}a} + \varepsilon^2\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}a} + \cdots\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^2 A_1\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}a} + O(\varepsilon^3) \tag{5.5.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a} + \varepsilon^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}a} + \cdots\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^2 A_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a} + O(\varepsilon^3) \tag{5.5.5}$$

(5.5.1)式代人 Duffing 方程(5.3.1)有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[a\cos\theta + \varepsilon x_1(a,\theta) + \cdots] + \omega_0^2[a\cos\theta + \varepsilon x_1(a,\theta) + \cdots]$$
$$= -\varepsilon\beta_0^2[a\cos\theta + \varepsilon x_1(a,\theta) + \cdots]^3 \tag{5.5.6}$$

但对于任一关于 a 和 θ 的函数 $q(a,\theta)$，应用复合函数求导的法则有

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{5.5.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2q}{\partial a^2} + 2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2q}{\partial a\partial\theta} + \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2q}{\partial\theta^2}$$
$$+ \frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial q}{\partial\theta} \tag{5.5.8}$$

这样就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\cos\theta) = -\omega_0 a\sin\theta + \varepsilon(A_1\cos\theta - \omega_1 a\sin\theta) + O(\varepsilon^2) \tag{5.5.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a\cos\theta) = -\omega_0^2 a\cos\theta + \varepsilon(2\omega_0\omega_1 a\cos\theta + 2\omega_0 A_1\sin\theta) + O(\varepsilon^2) \tag{5.5.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \omega_0\frac{\partial x_i}{\partial\theta} + \varepsilon\left(\omega_1\frac{\partial x_i}{\partial\theta} + A_1\frac{\partial x_i}{\partial a}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (i = 1,2,\cdots) \tag{5.5.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2\frac{\partial^2x_i}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2x_i}{\partial\theta^2} + 2\omega_0A_1\frac{\partial^2x_i}{\partial a\partial\theta}\right)$$
$$+ O(\varepsilon^2) \quad (i = 1,2,\cdots) \tag{5.5.12}$$

所以，方程(5.5.6)化为

$$\left[-\omega_0^2 a\cos\theta - \varepsilon\left(2\omega_0\omega_1 a\cos\theta + 2\omega_0A_1\sin\theta - \omega_0^2\frac{\partial^2x_1}{\partial\theta^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right]$$

$$+ \omega_0^2(a\cos\theta + \varepsilon x_1 + \cdots) = -\varepsilon\beta_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots)^3$$

(5.5.13)

注意,方程(5.5.13)的左端 ε^0 的系数已化为零,因而它的一级近似方程为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\theta^2} + x_1 = \frac{1}{\omega_0^2}\Big[\Big(2\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}\beta_0^2 a^2\Big)a\cos\theta + 2\omega_0 A_1\sin\theta - \frac{1}{4}\beta_0^2 a^3\cos 3\theta\Big] \quad (5.5.14)$$

显然,这里的非久期条件为

$$A_1 = 0, \quad \omega_1 = \frac{3\beta_0^2}{8\omega_0}a^2 \quad (5.5.15)$$

这样,方程(5.5.14)简化为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\theta^2} + x_1 = -\frac{\beta_0^2 a^3}{4\omega_0^2}\cos 3\theta \quad (5.5.16)$$

它的特解为

$$x_1 = \frac{\beta_0^2 a^3}{32\omega_0^2}\cos 3\theta \quad (5.5.17)$$

所以,用 KBM 方法求得的 Duffing 方程(5.3.1)的摄动解为

$$x = a\cos\theta + \frac{\varepsilon\beta_0^2}{32\omega_0^2}a^3\cos 3\theta + O(\varepsilon^2) \quad (5.5.18)$$

其中 a 和 θ 的变化率分别满足

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = O(\varepsilon^2) \quad (5.5.19)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0} + O(\varepsilon^2) \quad (5.5.20)$$

因而近似有

$$a = 常数 \quad (5.5.21)$$

$$\theta = \Big(\omega_0 + \varepsilon\frac{3\beta_0^2 a^2}{8\omega_0}\Big)t + O(\varepsilon^2) \quad (5.5.22)$$

这些与其他几种奇异摄动法的分析结果相似.

5.6 约化摄动法

约化摄动法是在 PLK 方法的基础上发展起来的一种摄动方法. 其目的是化复杂的非线性方程或方程组为比较简单的且可准确求解的非线性演化方程. 这些方程包含 Burgers 方程、KdV 方程、mKdV 方程和非线性 Schrödinger 方程等. 这些方程的准确解将在第 6 章中给出.

约化摄动法常用于求解非线性波动,其应用条件是长波近似,即 x 方向上的波数 k 满足

$$k \ll 1 \tag{5.6.1}$$

这就是通常所说的弱非线性条件.

约化摄动法的第一步是作所谓 GM 变换,第二步再作摄动展开,然后再化复杂的非线性方程或方程组为简单的非线性方程.

1. GM(Gardner-Morikawa)变换

在长波条件(5.6.1)下,非线性波的演变是慢变的. 但不同的非线性波动受不同的物理规律控制,频散关系不同,因而慢变的空间、时间尺度也不同. 设 ε 为一无量纲的小参数(它通常为无量纲振幅),则通常的 GM 变换的形式为

$$\xi = \varepsilon^{\alpha}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{\beta} t \tag{5.6.2}$$

其中 α,β 和 c 为常数. (5.6.2)式表明空间坐标变成了以 c 为速度的移动坐标.

为了说明 GM 变换,我们以在(1.2.6)式中已标记过的 KdV 方程为例来说明. KdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5.6.3}$$

在长波近似下,其最低阶的近似为线性 KdV 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5.6.4}$$

应用正交模方法，设

$$u = Ae^{i\theta}, \quad \theta = kx - \omega t \tag{5.6.5}$$

代入方程(5.6.4)求得频散关系为

$$\omega = kc - \beta k^3 \tag{5.6.6}$$

在长波条件下，波数 k 通常可以写为

$$k = \varepsilon^{\alpha} k_1 \tag{5.6.7}$$

其中 $k_1 = O(1)$，α 待定. 这样，相位函数为

$$\theta \equiv kx - \omega t = k_1[\varepsilon^{\alpha}(x - ct)] + \beta k_1^3(\varepsilon^{3\alpha} t) \tag{5.6.8}$$

由此便知，在长波近似下，慢变的空间尺度和时间尺度的合适关系为

$$\xi = \varepsilon^{\alpha}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3\alpha} t \tag{5.6.9}$$

这里 α 还有待确定. 因为(5.6.6)式是在线性条件下得到的，在非线性条件下，c 可以表为

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + O(\varepsilon^2) \tag{5.6.10}$$

因而(5.6.6)式可以改写为

$$\omega = k_1 \varepsilon^{\alpha}[c_0 + \varepsilon(c_1 - \beta k_1^2 \varepsilon^{2\alpha - 1}) + O(\varepsilon^2)] \tag{5.6.11}$$

这样，只有取 $2\alpha - 1 = 0$，即

$$\alpha = 1/2 \tag{5.6.12}$$

才能保证 c_1 与 βk_1^2 同量级. 这样，便确定了在长波近似下，KdV 方程的 GM 变换为

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \tag{5.6.13}$$

类似(参见习题 7.2)，我们可求得其他方程的 GM 变换，如

Burgers 方程：$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^2 t$ (5.6.14)

mKdV 方程：$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^3 t$ (5.6.15)

非线性 Schrödinger 方程：

$$\xi = \varepsilon(x - c_g t), \quad \tau = \varepsilon^2 t \tag{5.6.16}$$

在(5.6.16)式中 c_g 表群速度.

2. 约化摄动法

为了说明约化摄动法，我们来举两个例子.

例 1 浅水波的 Boussinesq 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{1}{3}H\dfrac{\partial^3 h}{\partial t^2\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}\tag{5.6.17}$$

(见(1.2.15)式).我们应用约化摄动法将方程组(5.6.17)化为可以准确求解的浅水波的 KdV 方程(5.3.17)或(1.2.6).

第一步,作 GM 变换,即利用(5.6.13)式.在此变换下必有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial\tau}-\varepsilon^{1/2}c\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\tag{5.6.18}$$

(5.6.18)式代入方程组(5.6.17)有

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial\tau}-c\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+u\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+g\dfrac{\partial h}{\partial\xi}+\dfrac{H}{3}\left(\varepsilon^3\dfrac{\partial^3 h}{\partial\tau^2\partial\xi}-2\varepsilon^2 c\dfrac{\partial^3 h}{\partial\tau\partial\xi^2}+\varepsilon c^2\dfrac{\partial^3 h}{\partial\xi^3}\right)=0\\[2mm]\varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial\tau}-c\dfrac{\partial h}{\partial\xi}+u\dfrac{\partial h}{\partial\xi}+h\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0\end{cases}\tag{5.6.19}$$

第二步,对 u 和 h 作摄动展开.因静止时($u=0$)流体深度为 H,因此,摄动展开应为

$$\begin{cases}h=H+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 h_2+\cdots\\ u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots\end{cases}\tag{5.6.20}$$

(5.6.20)式代入方程组(5.6.19),得到其一级近似和二级近似方程组分别为

$$\begin{cases}-c\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}+g\dfrac{\partial h_1}{\partial\xi}=0\\[2mm]-c\dfrac{\partial h_1}{\partial\xi}+H\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}=0\end{cases}\tag{5.6.21}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial\tau}-c\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi}+u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}+g\dfrac{\partial h_2}{\partial\xi}+\dfrac{1}{3}c^2H\dfrac{\partial^3 h_1}{\partial\xi^3}=0\\[2mm]\dfrac{\partial h_1}{\partial\tau}-c\dfrac{\partial h_2}{\partial\xi}+u_1\dfrac{\partial h_1}{\partial\xi}+h_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}+H\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi}=0\end{cases}\tag{5.6.22}$$

一级近似方程组(5.6.21)的两个方程分别对 ξ 积分，并取积分常数为零，则得到

$$cu_1 = gh_1, \quad ch_1 = Hu_1 \tag{5.6.23}$$

由此有

$$c^2 = gH = c_0^2 \tag{5.6.24}$$

(5.6.23)式和(5.6.24)式代入二级近似方程组(5.6.22)，得到

$$\begin{cases} \dfrac{c_0}{H}\dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c_0\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} + \dfrac{c_0^2}{H^2}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{1}{3}c_0^2 H\dfrac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c_0\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{c_0}{H}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + \dfrac{c_0}{H}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + H\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \tag{5.6.25}$$

方程组(5.6.25)的第一式乘以 H/c_0(即乘以 c_0/g)，并与第二式相加，则得

$$2\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{3c_0}{H}h_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{1}{3}c_0 H^2\frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0 \tag{5.6.26}$$

或

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{3c_0}{2H}h_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{1}{6}c_0 H^2\frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0 \tag{5.6.27}$$

这就是 KdV 方程.

若利用(5.6.18)式，将 τ, ξ 还原为 t, x，即利用

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \varepsilon^{-3/2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \varepsilon^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x} \tag{5.6.28}$$

则方程(5.6.27)化为

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3}{2H}\varepsilon h_1\right)\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{1}{6}c_0 H^2\frac{\partial^3 h_1}{\partial x^3} = 0 \tag{5.6.29}$$

注意(5.6.20)式，若令

$$\varepsilon h_1 = h - H = h' \tag{5.6.30}$$

则方程(5.6.29)又化为

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3h'}{2H}\right)\frac{\partial h'}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} = 0 \quad \left(\beta = \frac{1}{6}c_0 H^2\right) \tag{5.6.31}$$

这就是浅水波的 KdV 方程.

例 2 准地转位涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \tag{5.6.32}$$

(见(1.2.27)式),其中 u,v 和 q 分别见(1.2.28)式和(1.2.29)式.若令

$$u=\overline{u}(y)+u',\quad v=v',\quad u'=-\frac{\partial\psi'}{\partial y},\quad v'=\frac{\partial\psi'}{\partial x} \tag{5.6.33}$$

则方程(5.6.32)可以化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_2^2\psi'-\lambda_0^2\frac{\partial\psi'}{\partial t}+B_0\frac{\partial\psi'}{\partial x}=-J(\psi',\nabla_2^2\psi') \tag{5.6.34}$$

其中

$$B_0\equiv\beta_0-\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2} \tag{5.6.35}$$

而

$$J(A,B)\equiv\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{5.6.36}$$

为 Jacobi 算子.

设方程(5.6.34)的边界条件为

$$\psi'|_{y=y_1}=0,\quad \psi'|_{y=y_2}=0 \tag{5.6.37}$$

我们应用约化摄动法,可以将方程组(5.6.34)化为 KdV 方程.

第一步,作 GM 变换,即令

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-ct),\quad \tau=\varepsilon^{3/2}t,\quad y=y \tag{5.6.38}$$

在此变换下必有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial\tau}-\varepsilon^{1/2}c\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.6.39}$$

(5.6.39)式代入方程(5.6.34)有

$$\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+(\bar{u}-c)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right)-\lambda_0^2\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-c\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi'+B_0\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}$$
$$=-\left[\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right)\right] \tag{5.6.40}$$

它即是

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+(B_0+\lambda_0^2c)\psi'\right]+\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi'\right)\right.$$
$$\left.+(\bar{u}-c)\frac{\partial^3\psi'}{\partial\xi^3}\right]+\varepsilon^2\frac{\partial^3\psi'}{\partial\tau\partial\xi^2}$$
$$=-\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\frac{\partial^3\psi'}{\partial y^3}-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial^3\psi'}{\partial\xi\partial y^2}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\frac{\partial^3\psi'}{\partial\xi^2\partial y}-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial^3\psi'}{\partial\xi^3}\right) \tag{5.6.41}$$

第二步，对 ψ' 作摄动展开，即令

$$\psi'=\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots \tag{5.6.42}$$

(5.6.42)式代入方程(5.6.41)，得到其一级近似和二级近似方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+(B_0+\lambda_0^2c)\psi_1\right]=0 \tag{5.6.43}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+(B_0+\lambda_0^2c)\psi_2\right]=-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)\right.$$
$$\left.+(\bar{u}-c)\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\xi^3}\right]-\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^3}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\xi\partial y^2}\right) \tag{5.6.44}$$

对于一级近似方程(5.6.43)，设解

$$\psi_1=A(\xi,\tau)G(y) \tag{5.6.45}$$

其中 $G(y)$ 是实函数.(5.6.45)式代入方程(5.6.43)有

$$\left[(\bar{u}-c)\frac{d^2G}{dy^2}+(B_0+\lambda_0^2c)G\right]\frac{\partial A}{\partial\xi}=0 \tag{5.6.46}$$

设 $\frac{\partial A}{\partial\xi}\neq0$，则(5.6.46)式化为

$$(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}+(B_0+\lambda_0^2c)G=0 \qquad (5.6.47)$$

注意(5.6.37)式和(5.6.45)式，有

$$G|_{y=y_1}=0,\quad G|_{y=y_2}=0 \qquad (5.6.48)$$

在 $\bar{u}\neq c$ 时，合并(5.6.47)式和(5.6.48)式，得到下列本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}+Q(y)G=0\\ G|_{y=y_1}=0,\quad G|_{y=y_2}=0\end{cases} \qquad (5.6.49)$$

其中

$$Q(y)\equiv\frac{B_0+\lambda_0^2c}{\bar{u}-c}=\frac{\beta_0-\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\lambda_0^2c}{\bar{u}-c} \qquad (5.6.50)$$

对于本征值问题(5.6.49)，只要 $\bar{u}(y)$ 给定，则可确定本征值和本征函数. 例如，当 $\bar{u}(y)=$ 常数时，$Q(y)=\dfrac{\beta_0+\lambda_0^2c}{\bar{u}-c}=$ 常数，则由本征值问题(5.6.49)定得 $c=\dfrac{\bar{u}-\beta_0/l^2}{1+\lambda_0^2/l^2}\left(l^2=\dfrac{n\pi}{y_2-y_1},n=1,2,\cdots\right)$ 和 $G(y)=\sin l(y-y_1)$. c 的公式就是 $k\to0$ 时的 Rossby 公式.

当 $G(y)$ 被确定，在(5.6.45)式中就只有 $A(\xi,\tau)$ 等待被确定了，显然，它只有从二级近似方程(5.6.44)中被确定. (5.6.45)式代入二级近似方程(5.6.44)，得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+(B_0+\lambda_0^2c)\psi_2\right]=-\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-\lambda_0^2G\right)\frac{\partial A}{\partial\tau}+(\bar{u}-c)G\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}\right]-\left(G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}\right)A\frac{\partial A}{\partial\xi} \qquad (5.6.51)$$

(5.6.51)式两边同除以 $\bar{u}-c$，并注意 $\dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}=-QG$，则有

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+Q\psi_2\right)=\frac{Q+\lambda_0^2c}{\bar{u}-c}G\frac{\partial A}{\partial\tau}+\frac{1}{\bar{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)A\frac{\partial A}{\partial\xi}-G\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3} \qquad (5.6.52)$$

(5.6.52)式两边乘以 G，并对 y 从 y_1 到 y_2 积分，得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{y_1}^{y_2}G\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+Q\psi_2\right)\mathrm{d}y=\left(\int_{y_1}^{y_2}\frac{Q+\lambda_0^2}{\overline{u}-c}G^2\mathrm{d}y\right)\frac{\partial A}{\partial\tau}$$

$$+\left[\int_{y_1}^{y_2}\frac{G}{\overline{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)\mathrm{d}y\right]A\frac{\partial A}{\partial\xi}-\left(\int_{y_1}^{y_2}G^2\mathrm{d}y\right)\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3} \tag{5.6.53}$$

但(5.6.53)式左端利用(5.6.48)式有

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{y_1}^{y_2}G\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+Q\psi_2\right)\mathrm{d}y=\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(G\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-\psi_2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{y_1}^{y_2}\psi_2\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}+QG\right)\mathrm{d}y=0 \tag{5.6.54}$$

这样，(5.6.53)式就化为下列 KdV 方程

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}+\alpha A\frac{\partial A}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}=0 \tag{5.6.55}$$

其中

$$\alpha\equiv I_1/I_0,\quad \beta\equiv I_2/I_0 \tag{5.6.56}$$

而

$$\begin{cases}I_0\equiv\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}\frac{Q+\lambda_0^2}{\overline{u}-c}G^2\mathrm{d}y,\quad I_2\equiv-\int_{y_1}^{y_2}G^2\mathrm{d}y\\ I_1\equiv\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}\frac{G}{\overline{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)\mathrm{d}y\\ \quad=-\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}\frac{G^3}{\overline{u}-c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2}\frac{G^3}{\overline{u}-c}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\end{cases} \tag{5.6.57}$$

值得注意的是，若作变换

$$\xi=\varepsilon(x-ct),\quad \tau=\varepsilon^3t,\quad y=y \tag{5.6.58}$$

则方程(5.6.34)的三级近似可化为 mKdV 方程. 若作变换

$$\xi=\varepsilon(x-c_gt),\quad \tau=\varepsilon^2t,\quad y=y \tag{5.6.59}$$

则方程(5.6.34)的三级近似可化为非线性 Schrödinger 方程.

5.7 幂级数展开法

幂级数展开法是我们在 20 世纪 70 年代创立的求解弱非线性波动的一种方法，其效果类似于摄动法，但更为简洁. 我们试举一例说明.

例 1 浅水波的 Boussinesq 方程组

即方程组(5.6.17). 幂级数展开法的第一步是令

$$h = H + h', \quad u = u' \tag{5.7.1}$$

则方程组(5.6.17)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial t} + u'\dfrac{\partial u'}{\partial x} + g\dfrac{\partial h'}{\partial x} + \dfrac{1}{3}H\dfrac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h'}{\partial t} + u'\dfrac{\partial h'}{\partial x} + H\dfrac{\partial u'}{\partial x} + h'\dfrac{\partial u'}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5.7.2}$$

其第二步是令

$$u' = u'(\xi), \quad h' = h'(\xi), \quad \xi = x - ct \tag{5.7.3}$$

相应有

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \tag{5.7.4}$$

这样，方程组(5.7.2)就化为

$$\begin{cases} (u' - c)\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} + g\dfrac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi} + \dfrac{1}{3}Hc^2\dfrac{\mathrm{d}^3 h'}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \\ (u' - c)\dfrac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi} + (H + h')\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} = 0 \end{cases} \tag{5.7.5}$$

(5.7.5)的第二式可以改写为

$$-c\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi} + H\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}h'u'}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{5.7.6}$$

把它对 ξ 积分一次，取积分常数为零，求得

$$u' = \frac{ch'}{H + h'} \tag{5.7.7}$$

(5.7.7)式代入(5.7.5)的第一式，得到

$$\frac{\mathrm{d}^3h'}{\mathrm{d}\xi^3} + F(h')\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{5.7.8}$$

其中

$$F(h') = \frac{3g}{Hc^2}\left[1 - \frac{H^2c^2}{g(H+h')^3}\right] \tag{5.7.9}$$

是 h' 的非线性函数.

第三步是考虑弱非线性情况($h' \ll H$),将 $F(h')$ 作幂级数展开有

$$\begin{aligned} F(h') &= \frac{3g}{Hc^2}\left[1 - \frac{c^2}{gH}(1 - 3\varepsilon + 6\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))\right] \\ &= \frac{3g}{Hc^2}\left[\left(1 - \frac{c^2}{gH}\right) + \frac{3c^2}{gH}\varepsilon - \frac{6c^2}{gH}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right] \end{aligned} \tag{5.7.10}$$

其中

$$\varepsilon = h'/H \ll 1 \tag{5.7.11}$$

若 $F(h')$ 的级数展开式(5.7.10)只取第一项,则方程(5.7.8)化为

$$\frac{\mathrm{d}^3h'}{\mathrm{d}\xi^3} + \frac{3g}{Hc^2}\left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi} = 0 \quad (c_0^2 = gH) \tag{5.7.12}$$

这是线性方程.考虑 $\xi = x - ct$,则令

$$\frac{3g}{Hc^2}\left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right) = k^2 \tag{5.7.13}$$

其中 k 为波数.这样,方程(5.7.12)表征线性波动.并由(5.7.13)式求得线性波速满足

$$c^2 = \frac{c_0^2}{1 + \frac{k^2H^2}{3}} = c_0^2\left(1 - \frac{1}{3}k^2H^2 + \cdots\right) \tag{5.7.14}$$

而 x 正方向的线性波速为

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2H^2}{3}}} = c_0\left(1 - \frac{1}{6}k^2H^2 + \cdots\right) \tag{5.7.15}$$

若 $F(h')$ 的级数展开式(5.7.10)取到第二项,则方程(5.7.8)

化为

$$\frac{\mathrm{d}^3h'}{\mathrm{d}\xi^3}+\frac{3g}{Hc^2}\left(1-\frac{c^2}{c_0^2}\right)\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi}+\frac{9}{H^3}h'\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi}=0 \quad (5.7.16)$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程. 若应用(5.7.4)式将 ξ 换回 t 和 x,即是 KdV 方程.

若 $F(h')$ 的级数展开式(5.7.10)取到第三项,则方程(5.7.8)化为

$$\frac{\mathrm{d}^3h'}{\mathrm{d}\xi^3}+\frac{3g}{Hc^2}\left(1-\frac{c^2}{c_0^2}\right)\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi}+\frac{9}{H^3}h'\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi}-\frac{18}{H^4}h'^2\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\xi}=0$$

(5.7.17)

这是混合的 KdV-mKdV 方程(称为 Gardner 方程,见习题 6.32)所对应的常微分方程.

例 2 正压水平无辐散的 Rossby 波方程组

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}+\beta_0 v=0\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases} \quad (5.7.18)$$

首先我们要注意的是:若将方程组(5.7.18)的第一个方程(涡度方程)中的 u 取为 $\overline{u}$(常数),则得到线性无辐散的涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_0 v=0 \quad (5.7.19)$$

若设

$$u=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \quad (5.7.20)$$

其中 A,k,ω 分别为振幅、波数和圆频率. (5.7.20)式代入方程(5.7.19),求得

$$\omega=k\overline{u}-\beta_0/k \quad (5.7.21)$$

这就是经典的线性 Rossby 波的圆频率.

现在我们用幂级数解法求解非线性方程组(5.7.18).

第一步,令

$$u=\overline{u}+u',\quad v=v' \quad (5.7.22)$$

则方程组(5.7.18)化为

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(\bar{u}+u')\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\dfrac{\partial v'}{\partial x}+\beta_0 v'=0\\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}=0\end{cases}\tag{5.7.23}$$

第二步,令

$$u'=u'(\theta),\quad v'=v'(\theta),\quad \theta=kx+ly-\omega t\tag{5.7.24}$$

相应有

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\quad \frac{\partial}{\partial x}=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\tag{5.7.25}$$

这样,方程组(5.7.23)化为

$$\begin{cases}k(-\omega+k\bar{u}+ku')\dfrac{\mathrm{d}^2v'}{\mathrm{d}\theta^2}+\beta_0 v'=0\\ k\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\theta}+l\dfrac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}=0\end{cases}\tag{5.7.26}$$

方程组(5.7.26)的第二式对 θ 积分一次,取积分常数为零,求得

$$ku'+lv'=0\tag{5.7.27}$$

(5.7.27)式代入(5.7.26)的第一式,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2v'}{\mathrm{d}\theta^2}+F(v')v'=0\tag{5.7.28}$$

其中

$$F(v')\equiv-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u}+lv')}=-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})\left(1+\dfrac{lv'}{\omega-k\bar{u}}\right)}\tag{5.7.29}$$

是 v' 的非线性函数.

第三步是考虑弱非线性情况($lv'\ll|\omega-ku|$),将 $F(v')$ 作幂级数展开有

$$F(v')=-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}\left[1-\frac{lv'}{c_0-k\bar{u}}+\frac{l^2v'^2}{(\omega-k\bar{u})^2}-\cdots\right]\tag{5.7.30}$$

若 $F(v')$ 的级数展开式(5.7.30)只取第一项，则方程(5.7.28)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v'}{\mathrm{d}\theta^2}+\left[-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}\right]v'=0 \qquad (5.7.31)$$

这是线性方程. 若令

$$-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}=1 \qquad (5.7.32)$$

则得到(5.7.21)式.

若 $F(v')$ 的级数展开式(5.7.30)取到第二项，则方程(5.7.28)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v'}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}v'+\frac{\beta_0 l}{k(\omega-ku)^2}v'^2=0 \qquad (5.7.33)$$

上式对 θ 微商一次，求得

$$\frac{\mathrm{d}^3 v'}{\mathrm{d}\theta^3}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}+\frac{2\beta_0 l}{k(\omega-k\overline{u})}v'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}=0 \qquad (5.7.34)$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程，它与(5.7.16)式是相似的.

若 $F(v')$ 的级数展开式(5.7.30)取到第三项，则方程(5.7.28)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v'}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}v'+\frac{\beta_0 l}{k(\omega-ku)}v'^2-\frac{\beta_0 l^2}{k(\omega-k\overline{u})^3}v'^3=0$$
$$(5.7.35)$$

上式对 θ 微商一次，求得

$$\frac{\mathrm{d}^3 v'}{\mathrm{d}\theta^3}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\overline{u})}\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}+\frac{2\beta_0 l}{k(\omega-k\overline{u})}v'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}$$
$$-\frac{3\beta_0 l^2}{k(\omega-k\overline{u})^3}v'^2\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}=0 \qquad (5.7.36)$$

与(5.7.17)式相似，这是混合的 KdV-mKdV 方程(Gardner 方程)所对应的常微分方程.

下面，我们求解方程(5.7.33). 以 $2\dfrac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}$ 乘(5.7.33)式，并对 θ 积分一次，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}v'^2+\frac{2\beta_0 l}{3k(\omega-k\bar{u})^2}v'^3=A \tag{5.7.37}$$

其中 A 为积分常数.

(5.7.37)式不难改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=-\frac{2\beta_0 l}{3k(\omega-k\bar{u})^2}F(v') \tag{5.7.38}$$

其中

$$F(v')\equiv v'^3-\frac{3(\omega-k\bar{u})}{2l}v'^2+B \tag{5.7.39}$$

是 v' 的三次多项式,$B=-\dfrac{3k(\omega-k\bar{u})^2}{2\beta_0 l}A$.

设 $F(v')$有三个实的零点 v_1,v_2 和 v_3,且设 $v_1>0$,$v_2<0$,$v_3<v_2<0$,显然有

$$\begin{cases} v_1+v_2+v_3=\dfrac{3(\omega-k\bar{u})}{2l}, \\ v_1v_2+v_2v_3+v_3v_1=0, \quad v_1v_2v_3=-B \end{cases} \tag{5.7.40}$$

当 $l>0$ 时,方程(5.7.38)就是方程(2.7.183),则由(2.3.185)式求得

$$v'=v_2+(v_1-v_2)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{\beta_0 l(v_1-v_3)}{6k(\omega-k\bar{u})^2}}\,\theta \tag{5.7.41}$$

它称为 Rossby 波的椭圆余弦波解,其模数 m 满足

$$m^2=\frac{v_1-v_2}{v_1-v_3} \tag{5.7.42}$$

由(5.7.41)式知,椭圆余弦波的振幅和波长分别为

$$a=v_1-v_2 \tag{5.7.43}$$

和

$$L=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{6k(\omega-ku)^2}{\beta_0 l(v_1-v_3)}}\mathrm{K}(m) \tag{5.7.44}$$

其中

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - m^2x^2)}}dx \tag{5.7.45}$$

为第一类 Legendre 完全椭圆积分.

若取 $L=2\pi/k$,则(5.7.44)式化为

$$\sqrt{\frac{6k(\omega - k\bar{u})^2}{\beta_0 l(v_1 - v_3)}}K(m) = \pi \tag{5.7.46}$$

因而

$$(\omega - k\bar{u})^2 = \frac{\beta_0 l(v_1 - v_3)\pi^2}{6kK^2(m)} \tag{5.7.47}$$

(5.7.40)的第一式与(5.7.47)式结合求得

$$\omega - k\bar{u} = \frac{\beta_0}{k} \cdot \frac{\pi^2}{4K^2(m)} \cdot \left(\frac{v_1 - v_3}{v_1 + v_2 + v_3}\right) \tag{5.7.48}$$

这是普遍的非线性 Rossby 波圆频率的公式.由此公式看到,圆频率不仅与波数 k 有关,而且与振幅 $a=v_1-v_2$ 有关.

当 $m\to0$ 时,$a\to0(v_1\to v_2\to0)$,$K(m)\to\frac{\pi}{2}$,则(5.7.48)式化为

$$\omega - k\bar{u} = -\beta_0/k \tag{5.7.49}$$

这就是(5.7.21)式.

当 $m\to1$ 时,$v_2\to v_3$,则(5.7.41)式化为

$$v' = v_2 + (v_1 - v_2)\text{sech}^2\sqrt{\frac{\beta_0(v_1 - v_2)}{6k(\omega - ku)^2}}\,\theta \tag{5.7.50}$$

它称为 Rossby 孤立波.但由(5.7.40)式,

$$v_1 + 2v_2 = \frac{3(\omega - k\bar{u})}{2l}, \quad v_2(2v_1 + v_2) = 0, \quad v_1v_2^2 = -B \tag{5.7.51}$$

因而

$$v_1 = -\frac{\omega - k\bar{u}}{2l}, \quad v_2 = v_3 = \frac{\omega - k\bar{u}}{l}, \quad B = \left(\frac{\omega - k\bar{u}}{2l}\right)^3 \tag{5.7.52}$$

这样,(5.7.50)式化为

$$v' = \frac{\omega - ku}{l} - \frac{3(\omega - k\bar{u})}{2l}\,\mathrm{sech}^2\sqrt{-\frac{\beta_0}{4k(\omega - k\bar{u})}}\theta \tag{5.7.53}$$

其振幅与波宽分别为

$$a = -\frac{3(\omega - k\bar{u})}{2l} \tag{5.7.54}$$

和

$$d = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{-\frac{4k(\omega - k\bar{u})}{\beta_0}} = \sqrt{\frac{8la}{3\beta_0 k}} \tag{5.7.55}$$

由(5.7.54)式,求得 Rossby 孤立波的圆频率为

$$\omega = k\bar{u} - \frac{2la}{3} \tag{5.7.56}$$

相应,Rossby 孤立波的速度为

$$c \equiv \omega/k = \bar{u} - \frac{2la}{3k} \tag{5.7.57}$$

上式表明:振幅越大和波越宽的 Rossby 孤立波的速度越小,甚至为负值,这很像大气中的阻塞系统.而且,此时(5.7.53)式可改写为

$$v' = -\frac{2a}{3} + a\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3\beta_0}{8kla}}\theta \tag{5.7.58}$$

例 3 非线性重力内波的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z} - g\dfrac{\rho'}{\rho_0}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0\\[2mm] \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho'}{\partial x} - \dfrac{N^2}{g}\rho_0 w = 0\end{cases} \tag{5.7.59}$$

我们用幂级数展开法求解方程组(5.7.59).

第一步，令

$$
\begin{cases}
u = u(\theta), \quad w = w(\theta), \quad p' = p(\theta), \\
\rho'/\rho_0 = \Pi(\theta), \quad \theta = kx + nz - \omega t,
\end{cases}
\tag{5.7.60}
$$

相应有

$$
\frac{\partial}{\partial t} = -\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \tag{5.7.61}
$$

这样，方程组(5.7.59)化为

$$
\begin{cases}
(-\omega + ku)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{\rho_0}k\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} \\
(-\omega + ku)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{\rho_0}n\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} - g\Pi \\
k\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + n\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\
(-\omega + ku)\dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\theta} - \dfrac{N^2}{g}w = 0
\end{cases}
\tag{5.7.62}
$$

方程组(5.7.62)的第三式对 θ 积分一次，取积分常数为零，求得

$$
ku + nw = 0 \tag{5.7.63}
$$

方程组(5.7.62)的头两式消去 p 有

$$
(-\omega + ku)\left(n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} - k\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right) = kg\Pi \tag{5.7.64}
$$

(5.7.64)式利用(5.7.63)式消去 w，(5.7.62)的第四式也利用(5.7.63)式消去 w，得到

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = F(u,\Pi), \quad \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\theta} = G(u,\Pi) \tag{5.7.65}
$$

其中

$$
\begin{cases}
F(u,\Pi) = \dfrac{kng}{(k^2+n^2)(-\omega+ku)}\Pi = \dfrac{kng\Pi}{-\omega(k^2+n^2)\left(1-\dfrac{ku}{\omega}\right)} \\
G(u,\Pi) = -\dfrac{kN^2}{gn(-\omega+ku)}u = \dfrac{kN^2u}{\omega gn\left(1-\dfrac{ku}{\omega}\right)}
\end{cases}
\tag{5.7.66}
$$

第二步，考虑弱非线性的情况($ku \ll |\omega|$)，将 F 和 G 作幂级数展开有

$$\begin{cases} F = -\dfrac{kng}{\omega(k^2+n^2)}\Pi\left(1+\dfrac{k}{\omega}u+\dfrac{k^2}{\omega^2}u^2+\cdots\right) \\ G = \dfrac{kN^2}{\omega gn}u\left(1+\dfrac{k}{\omega}u+\dfrac{k^2}{\omega^2}u^2+\cdots\right) \end{cases} \tag{5.7.67}$$

若 F 和 G 的级数展开式(5.7.67)，只取第一项，则方程组(5.7.65)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{kng}{\omega(k^2+n^2)}\Pi, \quad \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{kN^2}{\omega gn}u \tag{5.7.68}$$

由此求得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{k^2N^2}{\omega^2(k^2+n^2)}u = 0 \tag{5.7.69}$$

这是线性方程，若取$\dfrac{k^2N^2}{\omega^2(k^2+n^2)}=1$，求得

$$\omega^2 = \frac{k^2N^2}{k^2+n^2} \tag{5.7.70}$$

这是线性重力内波的频率方程.

若 F 和 G 的级数展开式(5.7.67)取到第二项为止，则方程组(5.7.65)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{kng}{\omega(k^2+n^2)}\Pi - \dfrac{k^2ng}{\omega^2(k^2+n^2)}\Pi u \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{kN^2}{\omega gn}u + \dfrac{k^2N^2}{\omega^2 gn}u^2 \end{cases} \tag{5.7.71}$$

注意，由方程组(5.7.65)有

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}u} = \frac{G}{F} = -\frac{(k^2+n^2)N^2}{g^2n^2}\cdot\frac{u}{\Pi} \tag{5.7.72}$$

积分上式，得到

$$\Pi^2 + \frac{(k^2+n^2)N^2}{g^2n^2}u^2 = A \tag{5.7.73}$$

其中 A 是积分常数.

方程组(5.7.71)消去 Π、利用(5.7.73)式，并舍弃 u、Π 的三次项，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{k^2N^2}{\omega^2(k^2+n^2)}u+\frac{3k^3N^2}{\omega^3(k^2+n^2)}u^2-\frac{k^3g^2n^2}{\omega^3(k^2+n^2)^2}A=0 \tag{5.7.74}$$

上式对 θ 微商一次，求得

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\theta^3}+\frac{k^2N^2}{\omega^2(k^2+n^2)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}+\frac{6k^3N^2}{\omega^3(k^2+n^2)}u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=0 \tag{5.7.75}$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程.

习 题 5

5.1 用多尺度方法求解 Van der Pol 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\left(\frac{x^2}{a_c^2}-1\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

$\left(\text{提示：令 }\epsilon=\dfrac{2\mu}{\omega_0}\text{作为小参数}\right)$

5.2 用多尺度方法求解 Van der Pol 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=2\mu\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-y)x)\\[2mm]\tau\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\dfrac{x^2}{a_c^2}\quad(\tau=\text{常数})\end{cases}$$

5.3 用 PLK 方法求解非线性 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha u-\beta u^3=0\quad(\alpha,\beta>0)$$

(**提示**：先令 $u=u(\theta)$，$\theta=kx-\omega t$ 后再做)

5.4 用平均值方法求解

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=\epsilon k\omega_0^2x^2\quad(k=\text{常数})$$

5.5 用 KBM 方法求解

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon k \omega_0^2 x^2 \quad (k = \text{常数})$$

5.6　用约化摄动法化下列离子声波方程为 KdV 方程.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \dfrac{\partial nv}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^{\phi} - n \end{cases}$$

提示：令 $\xi = \varepsilon^{1/2}(x-t)$，$\tau = \varepsilon^{2/3}t$，和

$$\begin{cases} n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \cdots \\ v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \cdots \\ \phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \cdots \end{cases}$$

则最低阶近似满足

$$n_1 = \phi_1$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \quad (\text{可取 } n_1 = v_1)$$

下一阶近似满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_1}{\partial \tau} - \dfrac{\partial n_2}{\partial \xi} + \dfrac{\partial v_2}{\partial \xi} + \dfrac{\partial n_1 v_1}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} - \dfrac{\partial v_2}{\partial \xi} + v_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = \phi_2 + \dfrac{1}{2}\phi_1^2 - n_2 \end{cases}$$

最后得到

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 n_1}{\partial \xi^3} = 0$$

*5.7　用约化摄动法化下列二维浅水波方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{H^2}{3}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla_2^2 u = 0 \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + g\dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{H^2}{3}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla_2^2 v = 0 \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0
\end{cases}
$$

为二维 KdV 方程.

提示：令 $u=\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, v=\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$，方程组可化为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + gh + \dfrac{1}{2}(\nabla_2\phi)^2 - \dfrac{H^2}{3}\nabla_2^2\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \nabla_2\phi\cdot\nabla_2 h + h\nabla_2^2\phi = 0
\end{cases}
$$

作变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x-ct),\quad \tau = \varepsilon^{3/2}t,\quad \eta = \varepsilon y$$

并作摄动展开

$$h = H + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \cdots$$
$$\phi = \varepsilon^{1/2}(\phi_1 + \varepsilon\phi_2 + \cdots)$$

有 $c=c_0=\sqrt{gH}$ 和

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[2\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial^3\phi_1}{\partial \xi^3}\right] + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial \eta^2} = 0$$

5.8　证明(5.7.28)式可以化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v'}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\beta_0}{kl}\left[1 - \frac{1}{1+\dfrac{lv'}{\omega - k\bar{u}}}\right]$$

乘以 $2\dfrac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}$并对 θ 积分一次，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2\beta_0}{kl}\left\{v' - \frac{\omega - k\bar{u}}{l}\ln\left(1 + \frac{lv'}{\omega - k\bar{u}}\right)\right\} + A$$

其中 A 为积分常数.

将 $\ln\left(1+\dfrac{lv'}{\omega-k\bar{u}}\right)$ 作 Taylor 展开，证明结果与展开

$F(v')$的结果相似.

5.9 求解方程(5.7.74).

5.10 用幂级数展开法求解非线性惯性内波的下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-f_0 v=0\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+f_0 u=0\end{cases}$$

提示：令

$$u=u(\theta),\quad v=v(\theta),\quad \theta=kx-\omega t$$

方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{f_0}{-\omega+ku}v\equiv F(u,v)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{f_0}{-\omega+ku}u\equiv G(u,v)\end{cases}$$

第6章 行 波 解

求行波解不但是求解线性偏微分方程的一种有效途径，而且也是求解非线性偏微分方程，特别是求解非线性波方程的一种重要途径. 许多简单的但是重要的非线性波方程的解析解，主要是孤立波解就是通过这种做法获得的，并且通过求解获得了许多非线性波的重要性质.

6.1 广义的热传导方程

在(1.2.3)式中已经标记过的广义的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{6.1.1}$$

其中 κ 为导温系数. 当 $\alpha=0$ 时，方程(6.1.1)化为线性热传导方程.

求非线性方程的行波解是将方程的解写为下列形式：

$$u=u(\xi),\quad \xi=x-ct \tag{6.1.2}$$

其中 c 为常数，相当于波的移动速度.

(6.1.2)式代入方程(6.1.1)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(u^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) \tag{6.1.3}$$

上式两边对 ξ 积分一次，取积分常数为零，得

$$u^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{c}{\kappa}=0 \tag{6.1.4}$$

当 $\alpha\neq0$ 时，上式对 ξ 积分求得

$$u=\left[-\frac{\alpha c}{\kappa}(\xi-\xi_0)\right]^{1/\alpha}=\left[-\frac{\alpha c}{\kappa}(x-ct-\xi_0)\right]^{1/\alpha} \tag{6.1.5}$$

其中 ξ_0 为积分常数. 当 $\alpha=0$ 时,方程(6.1.4)积分求得

$$u = A\mathrm{e}^{-\frac{c}{\kappa}\xi} = A\mathrm{e}^{-\frac{c}{\kappa}(x-ct)} \tag{6.1.6}$$

其中 A 为积分常数.

6.2 Burgers 方程

在(1.2.5)式中已经标记过的 Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\nu > 0) \tag{6.2.1}$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.2.1)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - \nu\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \tag{6.2.2}$$

上式两边对 ξ 积分一次得

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = A \tag{6.2.3}$$

其中 A 是积分常数. 由(6.2.3)式有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{2\nu}(u^2 - 2cu - 2A) \tag{6.2.4}$$

设方程(6.2.4)右端

$$u^2 - 2cu - 2A = 0 \tag{6.2.5}$$

有两个实根: u_1^* 和 u_2^*, 且

$$u_1^* = c + \sqrt{c^2 + 2A}, \quad u_2^* = c - \sqrt{c^2 + 2A} \tag{6.2.6}$$

显然 $c^2+2A>0$, 且

$$u_1^* + u_2^* = 2c, \quad u_1^* - u_2^* = 2\sqrt{c^2 + 2A} \tag{6.2.7}$$

这样,方程(6.2.4)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{2\nu}(u - u_1^*)(u - u_2^*) \tag{6.2.8}$$

显然,在 $u=u_1^*$ 和 $u=u_2^*$ 处 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0$, 而且方程(6.2.8)很容易积分求得

$$u = c - \frac{1}{2}(u_1^* - u_2^*)\tanh\frac{u_1^* - u_2^*}{4\nu}(\xi - \xi_0) \quad (6.2.9)$$

其中 ξ_0 为积分常数.

(6.2.9)式就是 Burgers 方程(6.2.1)的行波解，波振幅和波速分别为

$$a = \frac{1}{2}(u_1^* - u_2^*),\quad c = \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*) \quad (c = a, 当\ u_2^* = 0\ 时) \quad (6.2.10)$$

而且显然有

$$u|_{\xi=\xi_0} = c,\quad u|_{\xi\to-\infty} = u_1^*,\quad u|_{\xi\to+\infty} = u_2^* \quad (6.2.11)$$

(6.2.9)式的图象见图 6-1，它称为冲击波(shock waves).

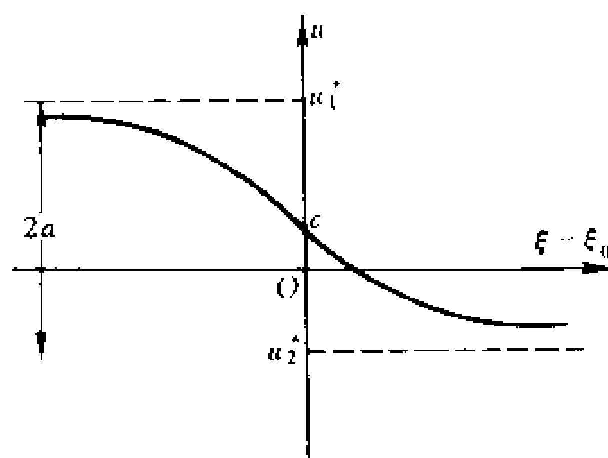


图 6-1

由此可见，Burgers 方程(6.2.1)通过一个连续变化的曲线将两个渐近状态 u_1^* 和 u_2^* 连接了起来.

从物理上分析，Burgers 方程表征的是一个非线性的耗散系统，如在(6.2.2)式中令 $v=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$，则它化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{\nu}(u - c)v \end{cases} \quad (6.2.12)$$

由此可知，其平衡位置满足 $v=0, u$ 任意. 但考虑到(6.2.8)式，则方程组(6.2.12)的平衡位置为

$$(u_1^*, v_1^*) = (u_1^*, 0) \quad \text{和} \quad (u_2^*, v_2^*) = (u_2^*, 0) \tag{6.2.13}$$

而由(6.2.12)式知，在平衡位置的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\nu}(u^* - c) \end{pmatrix} \tag{6.2.14}$$

从而求得特征方程为

$$\lambda\left[\lambda - \frac{1}{\nu}(u^* - c)\right] = 0 \tag{6.2.15}$$

因此，对平衡位置 $(u_1^*, 0)$ 而言，其特征根为 $\lambda_1^{(1)} = 0, \lambda_2^{(1)} = \dfrac{1}{\nu}(u_1^* - c) = \dfrac{\sqrt{c^2+2A}}{\nu} > 0$，因而是不稳定的鞍-结点；而对平衡位置 $(u_2^*, 0)$ 而言，其特征根为 $\lambda_1^{(2)} = 0, \lambda_2^{(2)} = \dfrac{1}{\nu}(u_2^* - c) = -\dfrac{\sqrt{c^2+2A}}{\nu} < 0$，因而是稳定的鞍-结点. 所以，Burgers 方程(6.2.1)的冲击波解(6.2.9)实际上是把两个不同归宿($\xi \to -\infty, u \to u_1^*$；$\xi \to +\infty, u \to u_2^*$)的鞍-结点连接而成的异宿轨道(heteroclinic orbit).

(6.2.9)式对 ξ 微商，就得到 v 的表达式：

$$v \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{(u_1^* - u_2^*)^2}{8\nu} \operatorname{sech}^2 \frac{u_1^* - u_2^*}{4\nu}(\xi - \xi_0) \tag{6.2.16}$$

它称为孤立波. 因为 $\xi \to \pm\infty$ 时，v 都 $\to 0$，因此，孤立波实际上是把两个相同归宿的平衡点连接而成的同宿轨道(homoclinic orbit). 孤立波和同宿轨道详见下一节.

6.3 KdV 方 程

在(1.2.6)式中已经标记过的 KdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{6.3.1}$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.3.1)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}=0 \tag{6.3.2}$$

上式两边对 ξ 积分一次得

$$-cu+\frac{1}{2}u^2+\beta\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}=A \tag{6.3.3}$$

其中 A 为积分常数. 由(6.3.3)式有

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}=-\frac{1}{2\beta}(u^2-2cu-2A)=-\frac{1}{2\beta}(u-u_1^*)(u-u_2^*) \tag{6.3.4}$$

其中 u_1^* 和 u_2^* 见(6.2.6)式.

方程(6.3.3)的两边乘以$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,再对 ξ 积分一次得到

$$-\frac{1}{2}cu^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{\beta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=Au+B \tag{6.3.5}$$

其中 B 为积分常数. 由(6.3.5)式有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-\frac{1}{3\beta}(u^3-3cu^2-6Au-6B) \tag{6.3.6}$$

设

$$u^3-3cu^2-6Au-6B=0 \tag{6.3.7}$$

有三个实根 u_1,u_2 和 u_3. 不失一般性,设 $u_1\geqslant u_2\geqslant u_3$. 显然有

$$\begin{cases} c=\frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3), \\ A=-\frac{1}{6}(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1), \\ B=\frac{1}{6}u_1u_2u_3 \end{cases} \tag{6.3.8}$$

这样,方程(6.3.6)可以改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-\frac{1}{3\beta}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \tag{6.3.9}$$

若 $\beta>0$，则方程(6.3.9)就是方程(2.3.183)，$A=\frac{1}{3\beta}$. 则由(2.3.185)式求得方程(6.3.9)的解为

$$u=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}(\xi-\xi_0),k\right]\quad(u_2\leqslant u\leqslant u_1)\tag{6.3.10}$$

其中 ξ_0 为积分常数，而模数

$$k=\sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}}\tag{6.3.11}$$

若 $\beta<0$，则方程(6.3.9)就是方程(2.3.178)，$A=-\frac{1}{3\beta}$. 则由(2.3.180)式求得方程(6.3.9)的解为

$$u=u_2-(u_2-u_3)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{-12\beta}}(\xi-\xi_0),h\right)\quad(u_3\leqslant u\leqslant u_2)\tag{6.3.12}$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}}\tag{6.3.13}$$

(6.3.10)式或(6.3.12)式就是 KdV 方程(6.3.1)的行波解，称为椭圆余弦波(cnoidal waves)，见图 6-2($\beta>0$ 的情况).

对于 $\beta>0$ 的情况，由(6.3.10)式表征的椭圆余弦波解是一

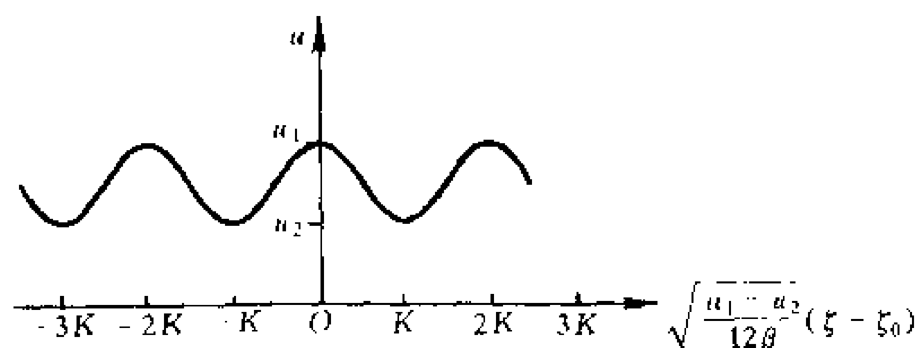


图 6-2

个周期函数，其振幅

$$a = u_1 - u_2 \tag{6.3.14}$$

因 $\mathrm{cn}^2 x$ 的周期为 $2\mathrm{K}(k)$，则椭圆余弦波的波长为

$$L = 2\mathrm{K}(k) \Big/ \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}} = 4\mathrm{K}(k) \Big/ \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{3\beta}} \tag{6.3.15}$$

其中

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \mathrm{d}\varphi = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \mathrm{d}x \tag{6.3.16}$$

为第一类 Legendre 完全椭圆积分. 当 $u_1 \to u_2$ 时，模数 $k \to 0$，此时，因 $\mathrm{cn}x \to \cos x$，则解(6.3.10)化为

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 - u_2)\cos \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{3\beta}}(\xi - \xi_0) \tag{6.3.17}$$

这是振幅 $\frac{1}{2}(u_1 - u_2) \to 0$ 的线性波. 而当 $u_2 \to u_3$ 时，模数 $k \to 1$，此时，因 $\mathrm{cn}x \to \mathrm{sech}x$，则解(6.3.10)化为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2)\mathrm{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}}(\xi - \xi_0) \tag{6.3.18}$$

显然，由(6.3.18)式有

$$u|_{\xi - \xi_0 \to 0} = u_1, \quad u|_{\xi - \xi_0 \to \infty} = u_2 \tag{6.3.19}$$

(6.3.18)式的图象见图 6-3，它称为孤立波(solitary waves)，它在移动过程中保持这个图形不变，常称为孤立子(soliton). $\sqrt{\frac{12\beta}{u_1 - u_2}}$ 称为孤立子的宽度.

在(6.3.18)式中，若取 $u_2 = 0$，此时 $u_3 = 0$，$A = B = 0$，则由(6.3.8)式，孤立波的振幅为

$$a = u_1 = 3c \tag{6.3.20}$$

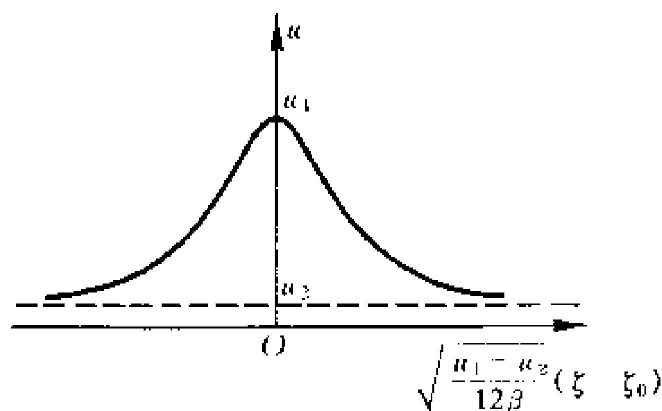


图 6-3

它与波速 c 成正比．这样，(6.3.18)式改写为

$$u=a\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{a}{12\beta}}(\xi-\xi_0)=3c\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4\beta}}(x-ct-\xi_0) \tag{6.3.21}$$

对于 $\beta<0$ 的解(6.3.12)亦可作类似讨论．

从物理上分析，KdV 方程表征的是一个非线性的频散系统．如在(6.3.4)式中令 $v=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$，则它化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-\dfrac{1}{2\beta}(u-u_1^*)(u-u_2^*)\equiv-V'(u)\end{cases} \tag{6.3.22}$$

其中

$$V(u)=\frac{1}{6\beta}(u^3-3cu^2-6Au-6B) \tag{6.3.23}$$

在(6.3.22)式中 $V'(u)$ 表 $V(u)$ 对 u 的微商．这样，方程(6.3.6)可以化为

$$\frac{1}{2}v^2+V(u)=0 \tag{6.3.24}$$

由此可见，若把 $v=\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$ 视为速度，则 $V(u)$ 可视为势能，在实数

范围内，(6.3.24)式成立要求

$$V(u) \leqslant 0 \tag{6.3.25}$$

由系统(6.3.22)知：其平衡位置为

$$(u_1^*, v_1^*) = (u_1^*, 0) \quad 和 \quad (u_2^*, v_2^*) = (u_2^*, 0) \tag{6.3.26}$$

其形式完全同(6.2.12)式，而 u_1^* 和 u_2^* 见(6.2.6)式. 系统(6.3.22)在平衡位置处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(u^*) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.27}$$

从而求得特征方程为

$$\lambda^2 + V''(u^*) = 0 \tag{6.3.28}$$

其中

$$V''(u) = \frac{1}{\beta}(u - c) \tag{6.3.29}$$

显然，对平衡位置$(u_1^*, 0)$，$V'(u_1^*) = 0$，$V''(u_1^*) > 0(\beta > 0)$或$V''(u_1^*) < 0(\beta < 0)$，其特征根或是共轭纯虚根$(\beta > 0)$或是不等实根$(\beta < 0)$；对平衡位置$(u_2^*, 0)$，$V'(u_2^*) = 0$，$V''(u_2^*) < 0(\beta > 0)$或 $V''(u_2^*) > 0(\beta < 0)$，其特征根或是不等实根$(\beta > 0)$或是共轭纯虚根$(\beta < 0)$. 所以，平衡位置$(u_1^*, 0)$和$(u_2^*, 0)$中一个是中心点，另一个是鞍点. 中心点是势能 $V(u)$的极小值点，鞍点是势能 $V(u)$的极大值点.

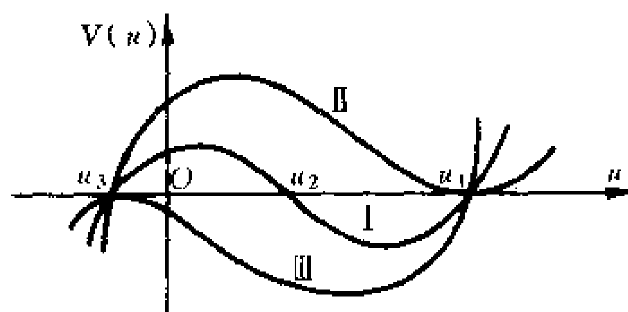


图 6-4

$\beta>0$ 时 $V(u)$ 随 u 变化的图象见图 6-4. 图中 u_1^* 是 $V(u)$ 的极小值点，u_2^* 是 $V(u)$ 的极大值点. 因此，椭圆余弦波解(6.3.10)是 u 在 $[u_2, u_1]$ 内围绕中心点 u_1^* 的闭合轨道，见曲线(Ⅰ)；而 $u_1 \to u_2$ 时的线性波解(6.3.17)是紧紧围绕中心点 $u_1^* \to u_1 \to u_2$ 的圆闭合轨道，见曲线(Ⅱ)；而 $u_2 \to u_3$ 时的孤立波解(6.3.18)是从鞍点 $u_2^* \to u_2 \to u_3$ 出发又回到该鞍点 u_2^* 的同宿轨道，见曲线(Ⅲ). 在坐标系 (u,v) 中，椭圆余弦波(Ⅰ)、线性波(Ⅱ)和孤立波(Ⅲ)的图象见图 6-5.

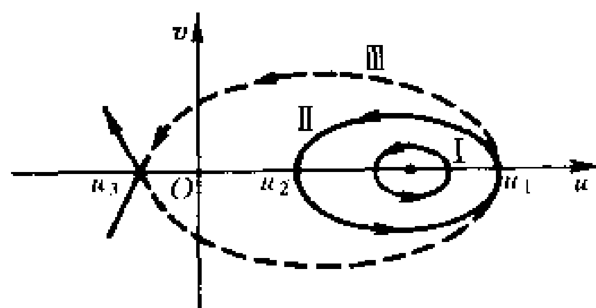


图 6-5

对于更一般形式的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}) \qquad (6.3.30)$$

我们可以令 $v = \alpha u$，使 v 的方程在形式上同方程(6.3.1)(见习题 6.1). 又可以类似方程(6.3.1)求它的椭圆余弦波解.

在 α 和 β 同号时，方程(6.3.30)的椭圆余弦波解为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha}{12\beta}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0), k\right]$$

$$\left[k = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}}\right] \qquad (6.3.31)$$

而在 α 和 β 异号时，方程(6.3.30)的椭圆余弦波解为

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{-\frac{\alpha}{12\beta}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0), k\right]$$

$$\left\{k = \sqrt{\frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}}\right\} \qquad (6.3.32)$$

在(6.3.31)式和(6.3.32)式中 u_1,u_2 和 u_3 是方程

$$u^3 - \frac{3c}{\alpha}u^2 - \frac{6A}{\alpha}u - \frac{6B}{\alpha} = 0 \qquad (6.3.33)$$

的三个实根($u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3$). A,B 是任意常数. 由(6.3.33)式知

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3c}{\alpha}, \quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = -\frac{6A}{\alpha}, \quad u_1u_2u_3 = \frac{6B}{\alpha} \qquad (6.3.34)$$

例如,$\alpha = -6$,$\beta = 1$ 的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (6.3.35)$$

的椭圆余弦波解可以由(6.3.32)式求得为

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{cn}^2\left\{\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0), k\right\}$$

$$\left\{k = \sqrt{\frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}}\right\} \qquad (6.3.36)$$

而在 $u_1 \to u_2 \to 0$ 时$\left(u_3 = -\frac{c}{2}\right)$的孤立波解为

$$u = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4}}(x - ct - \xi_0) \qquad (6.3.37)$$

对于浅水波的 KdV 方程

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3h'}{2H}\right)\frac{\partial h'}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} = 0 \quad \left(\beta = \frac{1}{6}c_0H^2\right) \qquad (6.3.38)$$

若设

$$h' = Hh_1'(\xi), \quad \xi = x - ct \qquad (6.3.39)$$

代入方程(6.3.38)得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}h_1'}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{3}{H^2}F(h_1') \qquad (6.3.40)$$

其中

$$F(h_1') \equiv h_1'^3 - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)h_1'^2 + 4Ah_1' + B \quad (6.3.41)$$

是 h_1' 的三次多项式，A 和 B 为积分常数.

不失一般性，我们取 $B=0$，从而选 $F(h_1')$ 的三个实零点为 a，0，$a-b(0<a<b)$，即

$$F(h_1') = h_1'(h_1' - a)(h_1' - a + b), \quad (0 < a < b) \quad (6.3.42)$$

比较(6.3.41)式和(6.3.42)式可得

$$2a - b = 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right) \quad (6.3.43)$$

这样，可求得浅水波 KdV 方程(6.3.38)的椭圆余弦波解为

$$h' = Ha\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{3b}{4H^2}}(\xi - \xi_0), k\right) \quad \left(k = \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \quad (6.3.44)$$

其波速由(6.3.43)式决定. 而波长为

$$L = 2\mathrm{K}(k)\Big/\sqrt{\frac{3b}{4H^2}} = \frac{4H}{\sqrt{3b}}\mathrm{K}(k) \quad \left(k = \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \quad (6.3.45)$$

当 $a=B$ 时，(6.3.44)式退化为下列孤立波解：

$$h' = Ha\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3a}{4H^2}}(x - ct - \xi_0) \quad (6.3.46)$$

其波速由(6.3.43)式定得为

$$c = c_0\left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (6.3.47)$$

6.4 非线性 Klein-Gordon 方程

我们重点分析在(1.2.12)式中已经标记过的正弦-Gordon 方程，其形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 \sin u = 0 \qquad (6.4.1)$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.4.1)有

$$(c^2 - c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + f_0^2 \sin u = 0 \qquad (6.4.2)$$

下面分 $c^2>c_0^2$ 和 $c^2<c_0^2$ 两种情况讨论.

1. $c^2>c_0^2$

此时方程(6.4.2)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + m^2 \sin u = 0 \qquad (6.4.3)$$

其中

$$m^2 = \frac{f_0^2}{c^2 - c_0^2} \qquad (6.4.4)$$

方程(6.4.3)在形式上同无阻尼的单摆运动方程(3.4.1). 同样,方程(6.4.3)可以化为下列微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = v \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = -m^2 \sin u \end{cases} \qquad (6.4.5)$$

其形式同方程组(3.4.9). 在相平面(u,v)上,它满足

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{m^2 \sin u}{v} \qquad (6.4.6)$$

积分上式求得

$$\frac{1}{2}v^2 + m^2(1 - \cos u) = H \qquad (6.4.7)$$

其中 H 为积分常数. 注意 $1-\cos u=2\sin^2\dfrac{u}{2}$,则(6.4.7)式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + 4m^2 \sin^2 \frac{u}{2} = 2H \qquad (6.4.8)$$

令

$$H = 2m^2 k^2 \qquad (6.4.9)$$

这样，方程(6.4.8)可改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 4m^2\left(k^2 - \sin^2\frac{u}{2}\right) \tag{6.4.10}$$

其形式同方程(3.4.18)．故仿单摆运动方程，在 $0<k^2\equiv\frac{H}{2m^2}<1$ 的条件下，求得

$$\sin\frac{u}{2} = \pm k\mathrm{sn}(m(\xi-\xi_0),k) \quad \left[k=\sqrt{\frac{H}{2m^2}}\right] \tag{6.4.11}$$

这就是在 $c^2>c_0^2$ 时正弦-Gordon 方程(6.4.1)的周期解，其中 ξ_0 为积分常数．

当 $k\to0$(即 $H\to0$)时，(6.4.11)式化为

$$\sin\frac{u}{2} = \pm k\sin m(\xi-\xi_0) \quad (-\pi<u<\pi) \tag{6.4.12}$$

这是正弦-Gordon 方程(6.4.1)的线性波解．

当 $k\to1$(即 $H\to2m^2$)时，(6.4.11)式化为

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\tanh m(\xi-\xi_0) = \tanh[\pm m(\xi-\xi_0)] \tag{6.4.13}$$

利用双曲正切函数的定义．(6.4.13)式很易化为

$$\mathrm{e}^{\pm m(\xi-\xi_0)} = \sqrt{\frac{1+\sin(u/2)}{1-\sin(u/2)}},$$

又因为

$$\sqrt{\frac{1+\sin(u/2)}{1-\sin(u/2)}} = \frac{1+\tan(u/4)}{1-\tan(u/4)} = \tan(u/4+\pi/4),$$

则(6.4.13)式可以改写为

$$u = -\pi + 4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{\pm m(\xi-\xi_0)}] \tag{6.4.14}$$

它称为正弦-Gordon 方程(6.4.1)的孤立波[①]解，其中

---

① 这是广义孤立波，它包含冲击波．

$$u_+ = -\pi + 4\tan^{-1}[e^{m(\xi-\xi_0)}] \tag{6.4.15}$$

称为扭结波(kink waves),也称为拓扑孤立子(topological sditon),见图 6-6. 而

$$u_- = -\pi + 4\tan^{-1}[e^{-m(\xi-\xi_0)}] \tag{6.4.16}$$

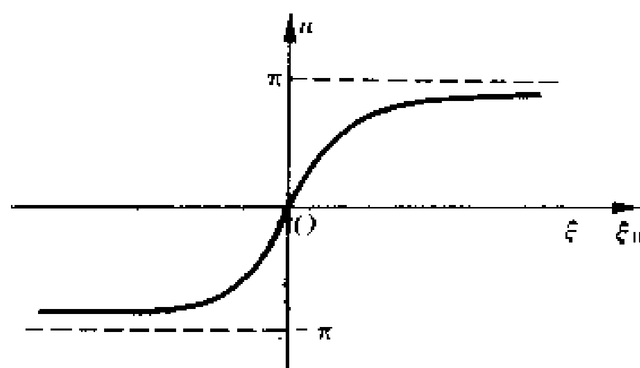


图 6-6

称为反扭结波(anti-kink waves),也称为反孤立子(anti-soliton),见图 6-7.

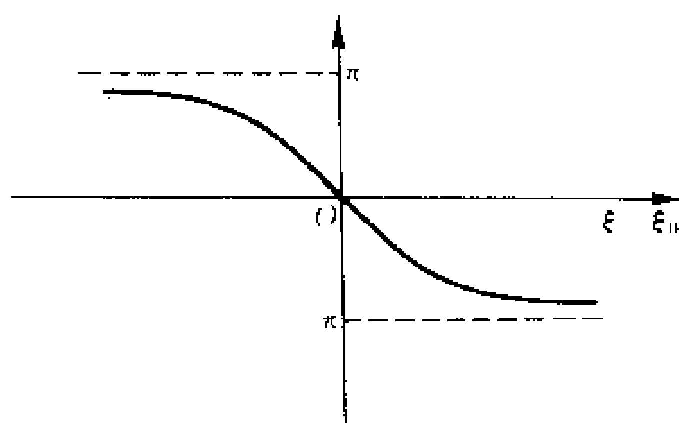


图 6-7

由于系统(6.4.5)有三个平衡位置,$(u_1^*, v_1^*)=(0,0)$是中心,$(u_2^*, v_2^*)=(-\pi,0)$和$(u_3^*, v_3^*)=(\pi,0)$是鞍点. 但由(6.4.14)式看到 $u|_{\xi\to-\infty}\to\mp\pi$,$u|_{\xi\to+\infty}\to\pm\pi$,因此,冲击波解(6.4.14)就是连接两个鞍点的异宿轨道.

(6.4.13)式对 ξ 微商就得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = 2m\mathrm{sech}m(\xi - \xi_0) \tag{6.4.17}$$

这也是一种孤立波的形式(同宿轨道).

2. $c^2 < c_0^2$

此时方程(6.4.10)仍适用,但改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 4n^2\left(\sin^2\frac{u}{2} - k^2\right) \tag{6.4.18}$$

其中

$$n^2 = \frac{f_0^2}{c_0^2 - c^2} \tag{6.4.19}$$

注意余模数 $k'^2 = 1 - k^2$,则方程(6.4.18)还可以改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 4n^2\left(k'^2 - \cos^2\frac{u}{2}\right) \tag{6.4.20}$$

方程(6.4.20)与方程(6.4.10)比较知,这里用 n^2 代替了 m^2,用 k'^2 代替了 k^2,用 $\cos\frac{u}{2}$ 代替了 $\sin\frac{u}{2}$,所以,方程(6.4.20)的解为

$$\cos\frac{u}{2} = \pm k'\mathrm{sn}[n(\xi - \xi_0), k'] \tag{6.4.21}$$

当 $k' \to 0$ 时,(6.4.21)式化为

$$\cos\frac{u}{2} = \pm k'\sin n(\xi - \xi_0) \quad (0 < u < 2\pi) \tag{6.4.22}$$

这是线性波;而当 $k' \to 1$ 时,(6.4.21)式化为

$$\cos\frac{u}{2} = \pm \tanh[n(\xi - \xi_0)] = \tanh[\pm n(\xi - \xi_0)] \tag{6.4.23}$$

注意(6.4.23)式很易化为 $\mathrm{e}^{\mp n(\xi-\xi_0)} = \sqrt{\frac{1-\cos u/2}{1+\cos u/2}}$,又因为 $\sqrt{\frac{1-\cos u/2}{1+\cos u/2}} = \tan\frac{u}{4}$,则(6.4.23)式可以改写为

$$u = 4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{\mp n(\xi - \xi_0)}] \tag{6.4.24}$$

这是孤立子(或扭结波)和反孤立子(或反扭结波).

(6.4.23)式对 ξ 微商就得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = 2n\operatorname{sech}n(\xi - \xi_0) \tag{6.4.25}$$

这也是一种孤立波的形式.

正弦-Gordon 方程除了扭结孤立子解外,还有一种呼吸孤立子解.为了求得这种解,我们首先对正弦-Gordon 方程(6.4.1)作变换

$$t_1 = f_0 t, \quad x_1 = \lambda_0 x \quad (\lambda_0 \equiv f_0/c_0) \tag{6.4.26}$$

这样,正弦-Gordon 方程就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \sin u \tag{6.4.27}$$

受正弦-Gordon 方程(6.4.1)存在形如(6.4.24)式的扭结波的启发,我们寻找方程(6.4.27)的下列形式解:

$$u = 4\tan^{-1}\left[\frac{X(x_1)}{T(t_1)}\right] \tag{6.4.28}$$

其中 $X(x_1)$ 和 $T(t_1)$ 分别只是 x_1 和 t_1 的函数.注意

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{4TX'}{X^2 + T^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = -\dfrac{4XT'}{X^2 + T^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \dfrac{4T}{(X^2 + T^2)^2}[(X^2 + T^2)X'' - 2XX'^2] \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = -\dfrac{4X}{(X^2 + T^2)^2}[(X^2 + T^2)T'' - 2TT'^2] \\ \sin u = \dfrac{4\tan\dfrac{u}{4}\left(1 - \tan^2\dfrac{u}{4}\right)}{\left(1 + \tan^2\dfrac{u}{4}\right)^2} = \dfrac{4XT(T^2 - X^2)}{(X^2 + T^2)^2} \end{cases} \tag{6.4.29}$$

则(6.4.28)式代入方程(6.4.27),得到

$$(X^2 + T^2)\left(\frac{X''}{X} + \frac{T''}{T}\right) - 2[(X')^2 + (T')^2] = T^2 - X^2 \tag{6.4.30}$$

将(6.4.30)式分别对 x_1 和 t_1 微商有：

$$\begin{cases} 2XX'\left(\dfrac{X''}{X}+\dfrac{T''}{T}\right)+(X^2+T^2)\left(\dfrac{X''}{X}\right)'-4X'X''=-2XX' \\ 2TT'\left(\dfrac{X''}{X}+\dfrac{T''}{T}\right)+(X^2+T^2)\left(\dfrac{T''}{T}\right)'-4T'T''=2TT' \end{cases} \tag{6.4.31}$$

(6.4.31)的两式分别除以 XX' 和 TT'，得到

$$\begin{cases} 2\left(-\dfrac{X''}{X}+\dfrac{T''}{T}\right)+\dfrac{X^2+T^2}{XX'}\left(\dfrac{X''}{X}\right)'=-2 \\ 2\left(\dfrac{X''}{X}-\dfrac{T''}{T}\right)+\dfrac{X^2+T^2}{TT'}\left(\dfrac{T''}{T}\right)^2=2 \end{cases} \tag{6.4.32}$$

(6.4.32)的两式相加，得到

$$\frac{1}{XX'}\left(\frac{X''}{X}\right)'=-\frac{1}{TT'}\left(\frac{T''}{T}\right)'=4\alpha \tag{6.4.33}$$

其中 4α 为分离变量常数.

(6.4.33)式分为下列两个常微分方程：

$$\left(\frac{X''}{X}\right)'=4\alpha XX',\quad \left(\frac{T''}{T}\right)'=-4\alpha TT' \tag{6.4.34}$$

它们分别积分一次得到

$$\frac{X''}{X}=2\alpha X^2+\beta_1,\quad \frac{T''}{T}=-2\alpha T^2+\beta_2 \tag{6.4.35}$$

其中 β_1 和 β_2 为积分常数.

(6.4.35)式的两个方程分别乘以 XX' 和 TT'，并再积分一次，得到

$$(X')^2=\alpha X^4+\beta_1X^2+\gamma_1,\quad (T')^2=-\alpha T^4+\beta_2T^2+\gamma_2 \tag{6.4.36}$$

其中 γ_1 和 γ_2 为积分常数.

(6.4.35)式和(6.4.36)式代入方程(6.4.30)，得到

$$-[(\beta_1-\beta_2)-1](X^2-T^2)=2(\gamma_1+\gamma_2) \tag{6.4.37}$$

由于 X 和 T 分别是 x_1 和 t_1 的函数，因此，(6.4.37)式成立要求

$$\beta_1 - \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \tag{6.4.38}$$

取 $\beta_2=-\beta,\gamma_1=\gamma$，则 $\beta_1=1-\beta,\gamma_2=-\gamma$、因而方程(6.4.36)化为

$$\begin{cases}(X')^2 = \alpha X^4 + (1-\beta)X^2 + \gamma \\ (T')^2 = -\alpha T^4 - \beta T^2 - \gamma\end{cases} \tag{6.4.39}$$

下面，在 $\alpha=-1,\gamma=0$ 的条件下求解. 此时，方程(6.4.39)化为(参见(2.3.198)式)

$$\begin{cases}(X')^2 = -X^4 + (1-\beta)X^2 \\ (T')^2 = T^4 - \beta T^2 \quad \text{或} \quad \left[\left(\dfrac{1}{T}\right)'\right]^2 = 1 - \beta\left(\dfrac{1}{T}\right)^2\end{cases} \tag{6.4.40}$$

所以，

$$\begin{cases}X' = \pm X\sqrt{(1-\beta) - x^2} \\ \left(\dfrac{1}{T}\right)' = \pm\sqrt{1-\beta\left(\dfrac{1}{T}\right)^2}\end{cases} \tag{6.4.41}$$

在 $0<\beta<1$ 的条件下，积分上式并取积分为零，求得

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta}}\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{X}{\sqrt{1-\beta}} = \pm x_1 = \pm \lambda_0 x \\ \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\sin^{-1}\sqrt{\beta}\,\dfrac{1}{T} = \pm t_1 = \pm f_0 t\end{cases} \tag{6.4.42}$$

所以(参见(2.3.199)式)

$$\begin{cases}X = \sqrt{1-\beta}\operatorname{sech}\sqrt{1-\beta}\,\lambda_0 x \\ \dfrac{1}{T} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\sin\sqrt{\beta}\,f_0 t\end{cases} \tag{6.4.43}$$

(6.4.43)式代入(6.4.28)式，求得

$$\tan\frac{u}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\frac{\sin\sqrt{\beta}\,f_0 t}{\cosh\sqrt{1-\beta}\,\lambda_0 x}, \quad (0<\beta<1) \tag{6.4.44}$$

这个解显示：它是一个周期为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\beta}\,f_0}$ 的周期解，在 x 轴的上方和

下方不断地变化着，很像不断呼吸的样子. 同时，看起来又像是孤立子和反孤立子的一对振荡，所以称它为正弦-Gordon 方程的呼吸孤立子解，简称为呼吸子（breather soliton 或 bion），又称为对称振子（doublet），见图 6-8. 图中 Ⓢ表孤立子，Ⓐ表反孤立子. 注意呼吸解是不传播的.

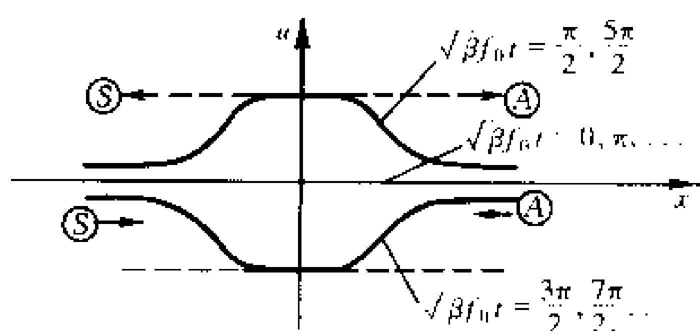


图 6-8

除正弦-Gordon 方程外，我们简单地说明下列两种非线性 Klein-Gordon 方程的行波解.

第一种非线性 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u-\beta u^2=0 \qquad (6.4.45)$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.4.45)有

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+\alpha u-\beta u^2=0 \qquad (6.4.46)$$

这是(2.3.196)式类型的方程，利用(2.3.197)式，对于 $c^2>c_0^2$ 且 $\alpha<0,\beta<0$ 和 $c^2<c_0^2$ 且 $\alpha>0,\beta>0$ 的情况有

$$u=\begin{cases}\dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(\xi-\xi_0) & \left(0\leqslant u\leqslant\dfrac{3\alpha}{\beta}\right)\\ -\dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{csch}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(\xi-\xi_0) & (u\leqslant 0)\end{cases}$$

(6.4.47)

对于 $c^2>c_0^2$ 且 $\alpha<0$ 和 $\beta>0$ 以及 $c^2<c_0^2$ 且 $\alpha>0$ 和 $\beta<0$ 的情况有

$$u=\begin{cases}-\dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{csch}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(\xi-\xi_0) & \left(0\leqslant u\leqslant-\dfrac{3\alpha}{2\beta}\right)\\ \dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(\xi-\xi_0) & (u\leqslant 0)\end{cases}$$

(6.4.48)

(6.4.47)式和(6.4.48)式就是方程(6.4.45)的孤立波解.

对于 $c^2>c_0^2$ 且 $\alpha>0$ 和 $c^2<c_0^2$ 且 $\alpha<0$ 的情况有

$$u=\frac{3\alpha}{2\beta}\sec^2\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(\xi-\xi_0) \qquad (6.4.49)$$

第二种非线性 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}+\alpha u-\beta u^3=0 \qquad (6.4.50)$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.4.50)有

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+\alpha u-\beta u^3=0 \qquad (6.4.51)$$

这是(2.3.123)式、(2.3.127)式和(2.3.131)式类型的方程,利用(2.3.124)式、(2.3.128)式和(2.3.132)式,对于 $c^2>c_0^2$ 且 $\alpha>0$, $\beta>0$和 $c^2<c_0^2$ 和 $\alpha<0,\beta<0$ 的情况有

$$u=\pm k\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(1+k^2)}}\operatorname{sn}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{(1+k^2)(c^2-c_0^2)}}(\xi-\xi_0),k\right]$$

(6.4.52)

当 $k\to 1$ 时,它化为

$$u=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tanh\sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2-c_0^2)}}(\xi-\xi_0) \qquad (6.4.53)$$

对于 $c^2>c_0^2$ 且 $\alpha<0,\beta<0$ 和 $c^2<c_0^2$ 且 $\alpha>0,\beta>0$ 的情况有

$$u=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(2-k^2)}}\operatorname{dn}\left[\sqrt{\frac{-\alpha}{(2-k^2)(c^2-c_0^2)}}(\xi-\xi_0),k\right]$$

(6.4.54)

当 $k \to 1$ 时，它化为

$$u = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{-\alpha}{c^2 - c_0^2}} (\xi - \xi_0) \qquad (6.4.55)$$

对于 $c^2 > c_0^2$ 且 $\alpha < 0, \beta > 0$ 和 $c^2 < c_0^2$ 且 $\alpha > 0, \beta < 0$ 的情况有

$$u = \pm \sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta(2-k^2)}} \operatorname{cs}\left[\sqrt{\frac{-\alpha}{(2-k^2)(c^2-c_0^2)}} (\xi - \xi_0), k\right] \qquad (6.4.56)$$

当 $k \to 1$ 时，它化为

$$u = \pm \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{csch} \sqrt{\frac{-\alpha}{c^2 - c_0^2}} (\xi - \xi_0) \qquad (6.4.57)$$

(6.4.52)式、(6.4.54)式和(6.4.56)式就是方程(6.4.50)的椭圆函数解，而(6.4.53)式、(6.4.55)式和(6.4.57)式就是方程(6.4.50)的孤立波解.

6.5 Boussinesq 方程

在(1.2.14)式中已经标记过的 Boussinesq 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0 \quad (\alpha, \beta > 0) \qquad (6.5.1)$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.5.1)有

$$(c^2 - c_0^2) \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - \alpha \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4} - \beta \frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \qquad (6.5.2)$$

上式两边对 ξ 积分一次，取积分常数为零得

$$(c^2 - c_0^2) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - \alpha \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} - \beta \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\xi} = 0 \qquad (6.5.3)$$

此式再对 ξ 积分一次有

$$(c^2 - c_0^2) u - \alpha \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - \beta u^2 = A \qquad (6.5.4)$$

其中 A 为积分常数.

方程(6.5.4)的两边乘以$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,再对$\xi$积分一次得到

$$\frac{1}{2}(c^2-c_0^2)u^2-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2-\frac{\beta}{3}u^3=Au+B \quad (6.5.5)$$

其中B为积分常数.由(6.5.5)式有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-\frac{2\beta}{3\alpha}\left[u^3-\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}u^2+\frac{3}{\beta}Au+\frac{3}{\beta}B\right] \quad (6.5.6)$$

设

$$u^3-\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}u^2+\frac{3}{\beta}Au+\frac{3}{\beta}B=0 \quad (6.5.7)$$

有三个实根:u_1,u_2和u_3($u_1\geqslant u_2\geqslant u_3$),显然有

$$\begin{cases}\dfrac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}=u_1+u_2+u_3,\\ \dfrac{3A}{\beta}=u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1,\\ \dfrac{3B}{\beta}=-u_1u_2u_3\end{cases} \quad (6.5.8)$$

则方程(6.5.6)可以改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-\frac{2\beta}{3\alpha}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \quad (6.5.9)$$

它与方程(6.3.9)相似,则根据(6.3.10)式求得

$$u=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{\beta(u_1-u_3)}{6\alpha}}\,\xi,k\right) \quad (u_2\leqslant u\leqslant u_1) \quad (6.5.10)$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}} \quad (6.5.11)$$

(6.5.10)式就是Boussinesq方程(6.5.1)的椭圆余弦波解.

当$u_1\to u_2$,即$k\to 0$时,(6.5.10)式化为

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 - u_2)\cos\sqrt{\frac{2\beta(u_1 - u_3)}{3\alpha}}\,\xi \tag{6.5.12}$$

这是线性波. 而当 $u_2 \to u_3$, 即 $k \to 1$ 时, (6.5.10)式化为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2)\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{\beta(u_1 - u_2)}{6\alpha}}\,\xi \tag{6.5.13}$$

这是孤立波. 特别取 $A=B=0$, 此时 $u_2=u_3=0, u_1=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}$, 则孤立波解(6.5.13)化为

$$u = \frac{3(c^2 - c_0^2)}{2\beta}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2 - c_0^2}{\alpha}}\,\xi \tag{6.5.14}$$

6.6 mKdV 方程

在(1.2.9)式中已经标记过的 mKdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{6.6.1}$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.6.1)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \alpha u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \beta\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \tag{6.6.2}$$

上式两边对 ξ 积分一次, 取积分常数为零, 得

$$-\beta\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + cu - \frac{\alpha}{3}u^3 = 0 \tag{6.6.3}$$

此方程与(6.4.51)式相似, 将(6.4.51)式中的 $c^2-c_0^2, \alpha, \beta$ 分别改为 $-\beta, c, \frac{\alpha}{3}$ 就变成了(6.6.3)式. 则类似地分析, 我们得到下列结果.

对于 $c>0, \alpha>0, \beta<0$ 和 $c<0, \alpha<0, \beta>0$ 的情况有

$$u = \pm k\sqrt{\frac{6c}{\alpha(1+k^2)}}\operatorname{sn}\left[\sqrt{\frac{-c}{\beta(1+k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.6.4}$$

当 $k \to 1$ 时，它化为

$$u = \pm \sqrt{\frac{3c}{\alpha}} \tanh \sqrt{-\frac{c}{2\beta}}(\xi - \xi_0) \tag{6.6.5}$$

对于 $c>0, \alpha>0, \beta>0$ 和 $c<0, \alpha<0, \beta<0$ 的情况有

$$u = \pm \sqrt{\frac{6c}{\alpha(2-k^2)}} \operatorname{dn}\left[\sqrt{\frac{c}{\beta(2-k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.6.6}$$

当 $k \to 1$ 时，它化为

$$u = \pm \sqrt{\frac{6c}{\alpha}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{c}{\beta}}(\xi - \xi_0) \tag{6.6.7}$$

对于 $c>0, \alpha<0, \beta>0$ 和 $c<0, \alpha>0, \beta<0$ 的情况有

$$u = \pm \sqrt{-\frac{6c}{\alpha(2-k^2)}} \operatorname{cs}\left[\sqrt{\frac{c}{\beta(2-k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.6.8}$$

当 $k \to 1$ 时，它化为

$$u = \pm \sqrt{-\frac{6c}{\alpha}} \operatorname{csch} \sqrt{\frac{c}{\beta}}(\xi - \xi_0) \tag{6.6.9}$$

(6.6.4)式、(6.6.6)式和(6.6.8)式就是 mKdV 方程(6.6.1)的椭圆函数解，而(6.6.5)式、(6.6.7)式和(6.6.9)式就是 mKdV 方程(6.6.1)的孤立波解. 孤立波的振幅都与 $\sqrt{c}$ 成正比. 例如，(6.6.7)式，令

$$a = \sqrt{\frac{6c}{\alpha}} \quad \left(c = \frac{\alpha}{6} a^2\right) \tag{6.6.10}$$

则(6.6.7)式可改写为

$$u = \pm a \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\alpha}{6\beta}}\, a(\xi - \xi_0) \tag{6.6.11}$$

6.7 BDO(Benjamin-Davis-Ono)方程

在(1.2.18)式中已经标记过的 BDO 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{H}\{u\}=0 \qquad (6.7.1)$$

其中

$$\mathscr{H}\{u\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x',t)}{x'-x}\,\mathrm{d}x' \qquad (6.7.2)$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.7.1)有

$$-(c-c_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\mathscr{H}\{u\}=0 \qquad (6.7.3)$$

上式两边对 ξ 积分一次，取积分常数为零，得

$$-(c-c_0)u+\frac{1}{2}u^2+\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathscr{H}\{u\}=0 \qquad (6.7.4)$$

因此时(6.7.2)式化为

$$\mathscr{H}\{u\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi')}{\xi'-\xi}\,\mathrm{d}\xi' \qquad (6.7.5)$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathscr{H}\{u\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi')}{(\xi'-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi' \qquad (6.7.6)$$

这样，方程(6.7.4)化为

$$-(c-c_0)u+\frac{1}{2}u^2+\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi')}{(\xi'-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi'=0$$

$$(6.7.7)$$

这是关于 $u(\xi)$ 的积分方程. 为此，我们设

$$u(\xi)=\frac{a}{\xi^2+b^2} \qquad (6.7.8)$$

其中 a 和 b 为待定常数.

(6.7.8)式代入方程(6.7.7)，得到

$$-(c-c_0)\frac{a}{\xi^2+b^2}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(\xi^2+b^2)^2}+\frac{\beta a}{b^3}$$

$$-\frac{2\beta a\xi^2}{b(\xi^2+b^2)}\left(\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{\xi^2+b^2}\right)=0 \tag{6.7.9}$$

上式两边乘以$(\xi^2+b^2)^2$后有

$$a\left[\frac{a}{2}+\beta b-(c-c_0)b^2\right]-a\xi^2\left[\frac{\beta}{b}+(c-c_0)\right]=0 \tag{6.7.10}$$

由此定得

$$b=-\frac{\beta}{c-c_0},\quad a=\frac{4\beta^2}{c-c_0} \tag{6.7.11}$$

所以,BDO 方程(6.7.1)的行波解为

$$u=\frac{\dfrac{4\beta^2}{c-c_0}}{\xi^2+\left(\dfrac{\beta}{c-c_0}\right)^2} \tag{6.7.12}$$

它称为代数孤立波(algebraic solitary waves).

6.8 离子声波方程

在(1.2.21)式中已经标记过的离子声波方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n}{\partial t}+\dfrac{\partial nv}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=e^{\phi}-n\end{cases} \tag{6.8.1}$$

设

$$n=n(\xi),\quad v=v(\xi),\quad \phi=\phi(\xi),\quad \xi=x-ct \tag{6.8.2}$$

(6.8.2)式代入方程组(6.8.1),得

$$
\begin{cases}
-c\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\xi}+\dfrac{\mathrm{d}nv}{\mathrm{d}\xi}=0 \\
-c\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}+v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} \\
\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}=\mathrm{e}^{\phi}-n
\end{cases}
\tag{6.8.3}
$$

上式的头两个方程两边对 ξ 积分一次，设 $|\xi|\to\infty$ 时，$n\to 1$，$v\to 0$，$\phi\to 0$，则得

$$
\begin{cases}
n(c-v)=c \\
\dfrac{1}{2}(c-v)^2=\dfrac{1}{2}c^2-\phi \\
\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}=\mathrm{e}^{\phi}-n
\end{cases}
\tag{6.8.4}
$$

由(6.8.4)的头两式得到

$$
n=\frac{c}{\sqrt{c^2-2\phi}}
\tag{6.8.5}
$$

(6.8.5)式代入(6.8.4)的第三个方程，得到

$$
\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}=F'(\phi)
\tag{6.8.6}
$$

其中

$$
F(\phi)=\int\left(\mathrm{e}^{\phi}-\frac{c}{\sqrt{c^2-2\phi}}\right)\mathrm{d}\phi=\mathrm{e}^{\phi}+c\sqrt{c^2-2\phi}-(c^2+1)
\tag{6.8.7}
$$

方程(6.8.6)式两边乘以 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$，并对 ξ 积分得到

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=F(\phi)
\tag{6.8.8}
$$

设 $\phi\ll 1$，并令

$$
\Delta c\equiv c-1\quad(0<\Delta c\ll 1)
\tag{6.8.9}
$$

则方程(6.8.8)近似化为

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{2}{3}\phi^2(3\Delta c-\phi)
\tag{6.8.10}
$$

这是形如(2.3.196)的方程,考虑$\phi>0$,则解为

$$\phi = 3\Delta c\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{\Delta c}{2}}(\xi-\xi_0) \tag{6.8.11}$$

这是离子声波电势的孤立波解.(6.8.11)式代入(6.8.5)式和(6.8.4)的第一式可求得n和v分别为

$$n = c\left[c^2 - 6\Delta c\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{\Delta c}{2}}(\xi-\xi_0)\right]^{-1/2} \tag{6.8.12}$$

$$v = c\left\{1 - \frac{\left[c^2 - 6\Delta c\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{\Delta c}{2}}(\xi-\xi_0)\right]^{1/2}}{c}\right\} \tag{6.8.13}$$

6.9 Fisher 方程

在(1.2.13)式中已经标记过的 Fisher 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku(1-u) = 0 \tag{6.9.1}$$

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.9.1)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - \nu\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - ku(1-u) = 0 \tag{6.9.2}$$

直接积分方程(6.9.2)是很难的,但若设

$$u = \frac{Be^{b(\xi-\xi_0)}}{[1+e^{a(\xi-\xi_0)}]^2} \tag{6.9.3}$$

其中B,a和b为待定常数,ξ_0可视为积分常数.

(6.9.3)式代入方程(6.9.2),注意

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = B\cdot\frac{e^{b(\xi-\xi_0)}[b+2(b-a)e^{a(\xi-\xi_0)}+(b-2a)e^{2a(\xi-\xi_0)}]}{[1+e^{a(\xi-\xi_0)}]^4} \tag{6.9.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2} = B\cdot\frac{e^{b(\xi-\xi_0)}[b^2-2(a^2-b^2+2ab)e^{a(\xi-\xi_0)}+(2a-b)^2e^{2a(\xi-\xi_0)}]}{[1+e^{a(\xi-\xi_0)}]^4} \tag{6.9.5}$$

则得到

$$(\nu b^2+cb+k)-kBe^{b(\xi-\xi_0)}+2[k-\nu(a^2-b^2+2ab)$$
$$+c(b-a)]e^{a(\xi-\xi_0)}+[k+\nu(2a-b)^2$$
$$+c(b-2a)]e^{2a(\xi-\xi_0)}=0 \qquad (6.9.6)$$

若取 $b=0$,则(6.9.6)式化为

$$k(1-B)+2(k-\nu a^2-ca)e^{a(\xi-\xi_0)}$$
$$+(k+4\nu a^2-2ac)e^{2a(\xi-\xi_0)}=0 \qquad (6.9.7)$$

在 $a\neq 0$ 时,令上式左端的常数项 $e^{a(\xi-\xi_0)}$ 和 $e^{2a(\xi-\xi_0)}$ 的系数为零得到

$$k(1-B)=0,\quad k-\nu a^2-ac=0,\quad k+4\nu a^2-2ac=0 \qquad (6.9.8)$$

由此求得

$$B=1,\quad a=\frac{c}{5\nu},\quad c^2=\frac{25}{6}\nu k \qquad (6.9.9)$$

这是 $b=0$ 的结果,由此求得

$$u=\frac{1}{[1+e^{\frac{c}{5\nu}(\xi-\xi_0)}]^2}=\frac{1}{4}\left[1-\tanh\frac{c}{10\nu}(\xi-\xi_0)\right]^2 \qquad (6.9.10)$$

这是 Fisher 方程的冲击波解.

若在(6.9.6)式中取 $b=2a$,则有

$$k+4\nu a^2+2ac=0,\quad k-\nu a^2+ca=0,\quad k(1-B)=0 \qquad (6.9.11)$$

由此求得

$$B=1,\quad a=-\frac{c}{5\nu},\quad c^2=\frac{25}{6}\nu k \qquad (6.9.12)$$

将这些结果代入(6.9.3)式同样会得到(6.9.10)式的结果.

从物理上分析,Fisher 方程表征的是一个反应扩散系统.如令 $v=\frac{du}{d\xi}$,则(6.9.2)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{du}{d\xi}=v\\[2mm]\dfrac{dv}{d\xi}=-\dfrac{c}{\nu}v-\dfrac{k}{\nu}u(1-u)\end{cases} \qquad (6.9.13)$$

显然，其平衡位置为

$$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)\quad 和\quad (u_2^*,v_2^*)=(1,0)\tag{6.9.14}$$

而由(6.7.13)式知，平衡位置的 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{\nu}(1-2u^*) & -\frac{c}{\nu}\end{pmatrix}\tag{6.9.15}$$

从而求得平衡位置$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{c}{\nu}\lambda+\frac{k}{\nu}=0\tag{6.9.16}$$

特征根为

$$\lambda=\frac{1}{2\nu}(-c\pm\sqrt{c^2-4k\nu})\tag{6.9.17}$$

则当 $c^2>4k\nu$ 时，λ 或为二正根 $(c<-2\sqrt{k\nu})$ 或为二负根 $(c>2\sqrt{k\nu})$，因而平衡位置$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$为结点；而当 $c^2<4k\nu$ 时，λ 为二共轭复根，因而平衡位置$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$为焦点.

平衡位置$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{c}{\nu}\lambda-\frac{k}{\nu}=0\tag{6.9.18}$$

特征根为

$$\lambda=\frac{1}{2\nu}(-c\pm\sqrt{c^2+4k\nu})\tag{6.9.19}$$

它为二不等实根且不同符号，因而平衡位置$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$是鞍点.

正由于此，由(6.9.10)式所表征的冲击波(它要求 $c^2=\frac{25}{6}\nu k>4\nu k$)实际上是连接鞍点$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$和结点$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$的异宿轨道.

在反应扩散方程中，还有一类形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ku(1-u)(u-\alpha)=0\quad\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right)\tag{6.9.20}$$

的方程. 它可以视为是 Fisher 方程(6.9.1)的推广.

若以行波解(6.1.2)式代入方程(6.9.20)有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-\nu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-ku(1-u)(u-\alpha)=0 \quad (6.9.21)$$

如令 $v=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,则(6.9.21)式化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{c}{\nu}v-\frac{k}{\nu}u(1-u)(u-\alpha)\end{cases} \quad (6.9.22)$$

显然,它有三个平衡位置:

$$(u_1^*,v_1^*)=(0,0),\quad (u_2^*,v_2^*)=(1,0),\quad (u_3^*,v_3^*)=(\alpha,0) \quad (6.9.23)$$

相应的特征方程和特征根分别为

$$\begin{cases}\lambda^2-\frac{c}{\nu}\lambda-\frac{k\alpha}{\nu}=0,\quad \lambda=\frac{1}{2\nu}(\ c\pm\sqrt{c^2+4\nu k\alpha})\\ \lambda^2+\frac{c}{\nu}\lambda-\frac{k}{\nu}(1-\alpha)=0,\quad \lambda=\frac{1}{2\nu}(-c\pm\sqrt{c^2+4\nu k(1-\alpha)})\\ \lambda^2+\frac{c}{\nu}\lambda+\frac{k\alpha(1-\alpha)}{\nu}=0,\quad \lambda=\frac{1}{2\nu}(-c\pm\sqrt{c^2-4\nu k\alpha(1-\alpha)})\end{cases} \quad (6.9.24)$$

所以,平衡位置$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$和$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$都是鞍点,而平衡位置$(u_3^*,v_3^*)=(\alpha,0)$在$c^2>4\nu k\alpha(1-\alpha)$时为结点,在$c^2<4\nu k\alpha(1-\alpha)$时为焦点.

为了求得连接鞍点(0,0)和(1,0)的异宿轨道,我们可设

$$u=\frac{B}{1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}} \quad (6.9.25)$$

其中 B 和 a 是待定常数.它可视为积分常数.

(6.9.25)式代入方程(6.9.21),注意

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=-B\frac{a\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^2}\\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=-B\frac{a^2\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}[1-\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^3}\end{cases} \quad (6.9.26)$$

则得到

$$-k(1-B)(B-\alpha)+[\nu a^2+ac-k(B-\alpha)+k\alpha(1-B)]e^{a(\xi-\xi_0)}+(-\nu a^2+ac+k\alpha)e^{2a(\xi-\xi_0)}=0 \tag{6.9.27}$$

因而有

$$\begin{cases} k(1-B)(B-\alpha)=0, \\ \nu a^2+ac-k(B-\alpha)+k\alpha(1-B)=0 \\ -\nu a^2+ac+k\alpha=0 \end{cases} \tag{6.9.28}$$

若取 $B=1$,则(6.9.28)式化为

$$\begin{cases} B=1, \\ \nu a^2+ac-k(1-\alpha)=0 \\ -\nu a^2+ac+k\alpha=0 \end{cases} \tag{6.9.29}$$

因而 a 与 c 同号($2ac=k(1-2\alpha)\geqslant 0$),而且有

$$B=1,\quad a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}},\quad c=\pm\sqrt{2\nu k}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) \tag{6.9.30}$$

代入(6.9.25)式求得

$$u=\frac{1}{1+e^{\mp\sqrt{\frac{k}{2\nu}}(\xi-\xi_0)}}=\frac{1}{2}\left[1\mp\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}(\xi-\xi_0)\right] \tag{6.9.31}$$

这是连接鞍点$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$和鞍点$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$的异宿轨道.

在(6.9.28)式中,若取 $B=\alpha$,则得到

$$\begin{cases} B=\alpha, \\ \nu a^2+ac+k\alpha(1-\alpha)=0 \\ -\nu a^2+ac+k\alpha=0 \end{cases} \tag{6.9.32}$$

因而 a 与 c 反号($2ac=-k\alpha(2-\alpha)<0$),而且有

$$B=\alpha,\quad a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\alpha,\quad c=\mp\sqrt{2\nu k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{6.9.33}$$

代入(6.9.25)式求得

$$u=\frac{\alpha}{2}\left[1\mp\tanh\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}(\xi-\xi_0)\right]\qquad(6.9.34)$$

不难证明 $c^2=2\nu k\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2>4\nu k\alpha(1-\alpha)$，因此，(6.9.34)式表征的是连接鞍点$(u_1^*,v_1^*)=(0,0)$和结点$(u_3^*,v_3^*)=(\alpha,0)$的异宿轨道.

非常有意思的是：形式为(6.9.31)式和(6.9.34)式的解分别满足方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=au(1-u)\quad\left(a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\right)\qquad(6.9.35)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=au(u-\alpha)\quad\left(a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\right)\qquad(6.9.36)$$

事实上，对于方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=a(u-\alpha)(u-\beta)\quad(\alpha>\beta)\qquad(6.9.37)$$

很容易积分求得

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\tanh\frac{a(\alpha-\beta)}{2}(\xi-\xi_0)\quad(6.9.38)$$

其中 ξ_0 为积分常数.

若取 $\alpha=1$，$\beta=0$，$a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$，则(6.9.37)式就化为(6.9.35)式，相应，(6.9.38)式就化为(6.9.31)式；若取 $\alpha=\alpha$，$\beta=0$，$a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$，则(6.9.37)式就化为(6.9.36)式，相应，(6.9.38)式就化为(6.9.34)式.

受上述分析的启发，对于方程(6.9.21)，我们可以假设

$$\frac{du}{d\xi}=a(1-u)(u-\alpha) \qquad (6.9.39)$$

因

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=a^2(1-u)(u-\alpha)(1+\alpha-2u) \qquad (6.9.40)$$

则(6.9.39)式和(6.9.40)式代入方程(6.9.21),得到

$$[-ac-\nu a^2(1+\alpha)]+(2\nu a^2-k)u=0 \quad (6.9.41)$$

使上式左端的常数项和 u 的系数为零,求得

$$a=\pm\sqrt{\frac{\nu}{2k}}, \quad c=\mp\sqrt{\frac{\nu k}{2}}(1+\alpha) \qquad (6.9.42)$$

而且根据(6.9.37)式和(6.9.38)式,求得

$$u=\frac{1+\alpha}{2}\pm\frac{1-\alpha}{2}\tanh\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}(\xi-\xi_0) \qquad (6.9.43)$$

不难证明:$c^2=\frac{\nu k}{2}(1+\alpha)^2>4\nu k\alpha(1-\alpha)$,因此,(6.9.43)式表征的是连接鞍点$(u_2^*,v_2^*)=(1,0)$和结点$(u_3^*,v_3^*)=(\alpha,0)$的异宿轨道.

6.10 KdV-Burgers 方程

在(1.2.7)式中已经标记过的 KdV-Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\nu>0,\beta>0)$$

(6.10.1)

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.10.1)有

$$c\frac{du}{d\xi}+u\frac{du}{d\xi}-\nu\frac{d^2u}{d\xi^2}+\beta\frac{d^3u}{d\xi^3}=0 \qquad (6.10.2)$$

上式两边对 ξ 积分一次,得

$$-cu+\frac{1}{2}u^2-\nu\frac{du}{d\xi}+\beta\frac{d^2u}{d\xi^2}=A \qquad (6.10.3)$$

其中 A 为积分常数.方程(6.10.3)很难直接积分,但可先作定性

分析，它的等价方程组为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = v \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = \dfrac{\nu}{\beta}v - \dfrac{1}{2\beta}(u^2 - 2cu - 2A)
\end{cases}
\tag{6.10.4}
$$

其平衡位置为

$$
(u_1^*, v_1^*) = (u_1^*, 0) \quad 和 \quad (u_2^*, v_2^*) = (u_2^*, 0)
\tag{6.10.5}
$$

其形式完全同(6.2.13)式或(6.3.26)式，而 u_1^* 和 u_2^* 见(6.2.6)式. 方程组(6.10.4)在平衡位置处的 Jacobi 矩阵为

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\beta}(u^* - c) & \dfrac{\nu}{\beta} \end{pmatrix}
\tag{6.10.6}
$$

从而求得平衡位置$(u_1^*, v_1^*) = (u_1^*, 0)$的特征方程为

$$
\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta}\lambda + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0
\tag{6.10.7}
$$

特征根为

$$
\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{\beta}\right)^2 - \frac{4}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A}}\right]
\tag{6.10.8}
$$

则当 $\nu^2 \geqslant 4\beta\sqrt{c^2 + 2A}$时，$\lambda$ 为二正根，因而$(u_1^*, 0)$为不稳定结点；而当 $\nu^2 < 4\beta\sqrt{c^2 + 2A}$时，$\lambda$ 为共轭复根且实部为正，因而$(u_1^*, 0)$为不稳定焦点.

平衡位置$(u_2^*, v_2^*) = (u_2^*, 0)$的特征方程为

$$
\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta}\lambda - \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0
\tag{6.10.9}
$$

特征根为

$$
\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{\beta}\right)^2 + \frac{4}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A}}\right]
\tag{6.10.10}
$$

它为二不等实根且不同符号，因而$(u_2^*, 0)$为鞍点.

这样，就存在连接鞍点$(u_2^*,0)$和结点$(u_1^*,0)$的异宿轨道($\nu^2 \geqslant 4\beta\sqrt{c^2+2A}$，见图6-9)以及连接鞍点$(u_2^*,0)$和焦点$(u_1^*,0)$的异宿轨道($\nu^2 < 4\beta\sqrt{c^2+2A}$，见图6-10)。

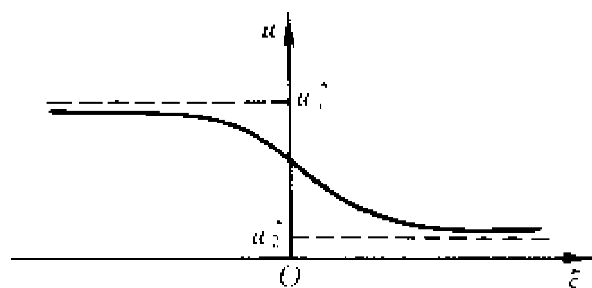


图 6-9

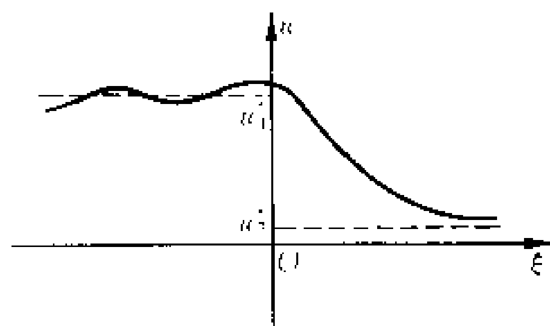


图 6-10

不管是图6-8还是图6-9的情况，我们都可以设

$$u = u_1^* + u' \quad (u_1^* = c - \sqrt{c^2 + 2A}) \tag{6.10.11}$$

(6.10.11)式代入方程(6.10.3)得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u'}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\nu}{\beta}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} - \frac{1}{2\beta}u'^2 + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u' = 0 \tag{6.10.12}$$

对于鞍-结异宿轨道，我们仿(6.9.3)式，设解为

$$u' = \frac{B\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^2} \tag{6.10.13}$$

代入方程(6.10.12)得到

$$b^2 + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta} - \frac{\nu}{\beta}b + \frac{B}{2\beta}e^{b(\xi-\xi_0)} + \left[\frac{2}{\beta}(\sqrt{c^2+2A}+a\nu-b\nu) - 2(a^2-b^2+2ab)\right]e^{a(\xi-\xi_0)} + \left[\frac{1}{\beta}(2a\nu-b\nu+\sqrt{c^2+2A}) + (2a-b)^2\right]e^{2a(\xi-\xi_0)} = 0 \tag{6.10.14}$$

取 $b=0$,(6.10.14)式化为

$$\left(\frac{B}{2\beta}+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}\right) - 2\left(a^2 - \frac{\nu}{\beta}a - \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}\right)e^{a(\xi-\xi_0)} + 2\left(2a^2+\frac{\nu}{\beta}a+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{2\beta}\right)e^{2a(\xi-\xi_0)} = 0 \tag{6.10.15}$$

由此定得

$$a = -\frac{\nu}{5\beta},\quad B = -\frac{12\nu^2}{25\beta},\quad \sqrt{c^2+2A} = \frac{6\nu^2}{25\beta} \tag{6.10.16}$$

因而求得

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{12\nu^2}{25\beta}\cdot\frac{1}{\left[1+e^{\frac{\nu}{5\beta}(\xi-\xi_0)}\right]^2} \\ &= -\frac{3\nu^2}{25\beta}\left[1+\tanh\frac{\nu}{10\beta}(\xi-\xi_0)\right]^2 \end{aligned} \tag{6.10.17}$$

所以

$$u = u_1^* - \frac{3\nu^2}{25\beta}\left[1+\tanh\frac{\nu}{10\beta}(\xi-\xi_0)\right]^2 \tag{6.10.18}$$

因由(6.10.16)的第三式 $\nu^2=\frac{25}{6}\beta\sqrt{c^2+2A}>4\beta\sqrt{c^2+2A}$,所以,由(6.10.18)式表征的就是 KdV-Burgers 方程(6.10.1)的冲击波解,即用图 6-8 描述的鞍-结异宿轨道.

对于鞍-焦异宿轨道,考虑在鞍点附近,即图 6-8 的右半部分类似于孤立波解,则根据(6.3.18)式有

$$u = u_2 + (u_1-u_2)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1-u_2}{12\beta}}\,\xi \quad (\xi>0) \tag{6.10.19}$$

其中 u_1 和 u_2 可由(6.3.8)式和孤立波条件($u_2=u_3$)得到

$$u_2 = u_2^* = c - \sqrt{c^2+2A}, \quad u_1 = 3c - 2u_2 = c + 2\sqrt{c^2+2A} \tag{6.10.20}$$

这样，(6.10.19)式可改写为

$$\begin{aligned} u &= u_2^* + 3\sqrt{c^2+2A}\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+2A}}{4\beta}}\,\xi \\ &= u_2^* + \frac{3}{2}(u_1^* - u_2^*)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1^* - u_2^*}{8\beta}}\,\xi \quad (\xi > 0) \end{aligned} \tag{6.10.21}$$

而鞍-焦异宿轨道在焦点附近，即图 6-9 的左部分类似于衰减振动，则忽略方程(6.10.12)中的小非线性项而化为下列线性阻尼振动方程：

$$\frac{d^2u'}{d\xi^2} - \frac{\nu}{\beta}\frac{du'}{d\xi} + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u' = 0 \tag{6.10.22}$$

它的解为

$$u' = a_0 e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos k\xi \tag{6.10.23}$$

其中 a_0 为振幅，而

$$k^2 = \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta} - \frac{\nu^2}{4\beta^2} = \frac{u_1^* - u_2^*}{2\beta} - \frac{\nu^2}{4\beta^2} \tag{6.10.24}$$

因而

$$u = u_1^* + a_0 e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos k\xi \quad (\xi < 0) \tag{6.10.25}$$

在 $\xi=0$ 处连接解(6.10.21)和(6.10.25)有 $u_2^* + 3\sqrt{c^2+2A} = u_1^* + a_0$，因而

$$a_0 = u_2^* - u_1^* + 3\sqrt{c^2+2A} = \sqrt{c^2+2A} = \frac{1}{2}(u_1^* - u_2^*) \tag{6.10.26}$$

这样，我们最后求得 KdV-Burgers 方程(6.10.1)的另一个冲击波解，即用图 6-9 描述的鞍-焦异宿轨道为

$$
u = \begin{cases} u_1^* + \dfrac{1}{2}(u_1^* - u_2^*)\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos\sqrt{\dfrac{u_1^* - u_2^*}{2\beta} - \dfrac{\nu^2}{4\beta^2}}\,\xi & (\xi < 0) \\ u_2^* + \dfrac{3}{2}(u_1^* - u_2^*)\mathrm{sech}^2\sqrt{\dfrac{u_1^* - u_2^*}{8\beta}}\,\xi & (\xi > 0) \end{cases}
$$

(6.10.27)

6.11 KdV-Burgers-Kuramoto 方程

在(1.2.8)式中已经标记过的 KdV-Burgers-Kuramoto 方程，又称为 Benney 方程为

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (\alpha\gamma > 0)
$$

(6.11.1)

上式要求 $\alpha\gamma > 0$ 表示 $\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\gamma\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 中的一个表征耗散作用，另一个表征不稳定作用.

以行波解(6.1.2)式代入方程(6.11.1)有

$$
c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \alpha\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + \beta\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} + \gamma\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4} = 0 \qquad (6.11.2)
$$

上式两边对 ξ 积分一次，得

$$
-cu + \frac{1}{2}u^2 + \alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \beta\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} = A \qquad (6.11.3)
$$

其中 A 为积分常数. 方程(6.11.3)也很难直接积分．与方程(6.10.3)相同，以(6.10.11)式代入方程(6.11.3)，得到

$$
\gamma\frac{\mathrm{d}^3 u'}{\mathrm{d}\xi^3} + \beta\frac{\mathrm{d}^2 u'}{\mathrm{d}\xi^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{2}u'^2 + \sqrt{c^2 + 2A}\,u' = 0
$$

(6.11.4)

考虑 KdV-Burgers-Kuramoto 方程比 KdV-Burgers 方程高一阶，所以，我们设

$$
u' = \frac{B\mathrm{e}^{b(\xi - \xi_0)}}{[1 + \mathrm{e}^{a(\xi - \xi_0)}]^3} \qquad (6.11.5)
$$

其中 B、a 和 b 为待定常数，ξ_0 可视为积分常数.

(6.11.5)式代入方程(6.11.4)，注意

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\xi}=B\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}\left\{\frac{b}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^3}-\frac{3a\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^4}\right\},\tag{6.11.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\xi^2}=B\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}\left\{\frac{b^2}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^3}-\frac{3a(a+2b)\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^4}+\frac{12a^2\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^5}\right\},\tag{6.11.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\xi^3}=B\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}\left\{\frac{b^3}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^3}-\frac{3a(a^2+3ab+3b^2)\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^4}+\frac{36a^2(a+b)\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^5}-\frac{60a^3\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}}{[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^6}\right\}\tag{6.11.8}$$

则得到

$$\begin{aligned}&\gamma\{b^3[1+3\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+3\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}]\\&-3a(a^2+3ab+3b^2)[1+2\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}]\\&\times\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+36a^2(a+b)[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}-60a^3\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}\}\\&+\beta\{b^2[1+3\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+3\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}]\\&-3a(a+2b)[1+2\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}]\\&\times\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+12a^2\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}[1+\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]\}\\&+\alpha\{b[1+3\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+3\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}]\\&-3a\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}[1+2\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}]\}+\frac{1}{2}B\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}\\&-\sqrt{c^2+2A}[1+3\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}+3\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}]=0\end{aligned}\tag{6.11.9}$$

若取 $b=0$，则(6.11.9)式化为

$$
\begin{aligned}
&\frac{B}{2}+\sqrt{c^2+2A}-3\left(\gamma a^3+\beta a^2+\alpha a-\sqrt{c^2+2A}\right)\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)} \\
&\quad+3\left(10\gamma a^3+2\beta a^2-2\alpha a+\sqrt{c^2+2A}\right)\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)} \\
&\quad-\left(27\gamma a^3-9\beta a^2+3\alpha a-\sqrt{c^2+2A}\right)\mathrm{e}^{3a(\xi-\xi_0)}=0
\end{aligned}
\tag{6.11.10}
$$

由此定得

$$
a=\frac{\beta}{12\gamma}=\frac{12\alpha}{47\beta},\quad \sqrt{c^2+2A}=\frac{5\alpha\beta}{47\gamma},\quad B=-2\sqrt{c^2+2A}
\tag{6.11.11}
$$

因而

$$
\beta>0,\quad \beta^2-\frac{144}{47}\alpha\gamma
\tag{6.11.12}
$$

而且

$$
\begin{cases}
a=-\dfrac{1}{\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad \sqrt{c^2+2A}=-\dfrac{60}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \\
B=\dfrac{120}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\quad(\alpha<0,\gamma<0) \\
a=\dfrac{1}{\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad \sqrt{c^2+2A}=\dfrac{60}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \\
B=-\dfrac{120}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\quad(\alpha>0,\gamma>0)
\end{cases}
\tag{6.11.13}
$$

所以

$$
u'=\begin{cases}
\dfrac{15}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\left[1+\tanh\dfrac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right]^3 \\
\qquad\qquad\qquad(\alpha<0,\gamma<0) \\
-\dfrac{15}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\left[1-\tanh\dfrac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right]^3 \\
\qquad\qquad\qquad(\alpha>0,\gamma>0)
\end{cases}
\tag{6.11.14}
$$

这样就有

$$
u=\begin{cases}
u_2^*+\dfrac{15}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\left[1+\tanh\dfrac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right]^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(\alpha<0,\gamma<0) \\
u_1^*-\dfrac{15}{47\sqrt{47}}\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\left[1-\tanh\dfrac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right]^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(\alpha>0,\gamma>0)
\end{cases}
\tag{6.11.15}
$$

这是方程(6.11.1)的一个冲击波解,很易证明

$$
\begin{cases}
\xi\to+\infty,\quad u\to u_2^*\equiv c-\sqrt{c^2+2A}; \\
\xi\to-\infty,\quad u\to u_1^*\equiv c+\sqrt{c^2+2A}
\end{cases}\quad(\alpha<0,\gamma<0)
$$
$$
\begin{cases}
\xi\to+\infty,\quad u\to u_1^*\equiv c+\sqrt{c^2+2A}; \\
\xi\to-\infty,\quad u\to u_2^*\equiv c-\sqrt{c^2+2A}
\end{cases}\quad(\alpha>0,\gamma>0)
\tag{6.11.16}
$$

若取 $b=a$,则(6.11.9)式化为

$$
\begin{aligned}
&\gamma a^3+\beta a^2+\alpha a+\sqrt{c^2+2A}-\left(18\gamma a^3+6\beta a^2-\frac{1}{2}B\right. \\
&\qquad\left.-3\sqrt{c^2+2A}\right)e^{a(\xi-\xi_0)}+3(11\gamma a^3-\beta a^2-\alpha a \\
&\quad+\sqrt{c^2+2A})e^{2a(\xi-\xi_0)}-(8\gamma a^3-4\beta a^2+2\alpha a \\
&\quad-\sqrt{c^2+2A})e^{3a(\xi-\xi_0)}=0
\end{aligned}
\tag{6.11.17}
$$

由此定得

$$
\begin{cases}
a=\dfrac{\beta}{4\gamma}=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \\
\sqrt{c^2+2A}=-\dfrac{3\alpha\beta}{2\gamma}, \\
B=30\,\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}
\end{cases}
\tag{6.11.18}
$$

因而

$$\beta < 0, \quad \beta^2 = 16\alpha\gamma \tag{6.11.19}$$

而且

$$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \quad \sqrt{c^2 + 2A} = -6\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \quad B = 120\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}} \\ \hfill (\alpha < 0, \gamma < 0) \\ a = -\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \quad \sqrt{c^2 + 2A} = 6\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}, \quad B = -120\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}} \\ \hfill (\alpha > 0, \gamma > 0) \end{cases} \tag{6.11.20}$$

所以

$$u' = \begin{cases} 15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 - \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \hfill (\alpha < 0, \gamma < 0) \\ -15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 + \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \hfill (\alpha > 0, \gamma > 0) \end{cases} \tag{6.11.21}$$

这样就有

$$u = \begin{cases} u_1^* + 15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 - \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \hfill (\alpha < 0, \gamma < 0) \\ u_1^* - 15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 + \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \hfill (\alpha > 0, \gamma > 0) \end{cases} \tag{6.11.22}$$

这是方程(6.11.1)的一个孤立波解，显然

$$\xi \to \pm\infty \quad u \to u_1^* \equiv c + \sqrt{c^2 + 2A} \tag{6.11.23}$$

若取 $b=2a$，则(6.11.9)式化为

$$
\begin{aligned}
&8\gamma a^3+4\beta a^2+2\alpha a+\sqrt{c^2+2A}-3(11\gamma a^3+\beta a^2-\alpha a \\
&\quad-\sqrt{c^2+2A})e^{a(\xi-\xi_0)}+\left(18\gamma a^3-6\beta a^2+\frac{1}{2}B\right. \\
&\quad\left.+3\sqrt{c^2+2A}\right)e^{2a(\xi-\xi_0)}-(\gamma a^3-\beta a^2+\alpha a \\
&\quad-\sqrt{c^2+2A})e^{3a(\xi-\xi_0)}=0
\end{aligned}
\tag{6.11.24}
$$

由此定得

$$
a=\frac{\beta}{4\gamma}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}},\quad \sqrt{c^2+2A}=-\frac{3\alpha\beta}{2\gamma},\quad B=30\frac{\alpha\beta}{\gamma}
\tag{6.11.25}
$$

因而

$$
\beta<0,\quad \beta^2=16\alpha\gamma
\tag{6.11.26}
$$

此式同(6.11.19)式. 而且

$$
\begin{cases}
a=-\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad \sqrt{c^2+2A}=-6\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad B=120\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha<0,\gamma<0) \\
a=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad \sqrt{c^2+2A}=6\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}},\quad B=-120\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha>0,\gamma>0)
\end{cases}
\tag{6.11.27}
$$

所以

$$
u'=\begin{cases}
15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\left[1-\tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha<0,\gamma<0) \\
15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\left[1+\tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi-\xi_0)\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha>0,\gamma>0)
\end{cases}
\tag{6.11.28}
$$

其形式同(6.11.21)式. 最后有

$$
u = \begin{cases} u_1^* + 15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 - \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \qquad\qquad (\alpha < 0, \gamma < 0) \\ u_1^* - 15\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\left[1 + \tanh\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}(\xi - \xi_0)\right] \\ \qquad\qquad (\alpha > 0, \gamma > 0) \end{cases} \tag{6.11.29}
$$

其形式同(6.11.22)式.类似有

$$
\xi \to +\infty, \quad u \to u_1^* \equiv c + \sqrt{c^2 + 2A} \tag{6.11.30}
$$

从物理上分析,KdV-Burgers-Kuramoto 方程表征的是一个非线性的耗散-频散-不稳定系统.如在(6.11.3)式中令 $v = \dfrac{du}{d\xi}, w = \dfrac{dv}{d\xi}$,则它化为

$$
\begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} = v \\ \dfrac{dv}{d\xi} = w \\ \dfrac{dw}{d\xi} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}v - \dfrac{\beta}{\gamma}w - \dfrac{1}{2\gamma}(u^2 - 2cu - 2A) \end{cases} \tag{6.11.31}
$$

其平衡位置为

$$
(u_1^*, v_1^*, w_1^*) = (u_1^*, 0, 0) \quad 和 \quad (u_2^*, v_2^*, w_2^*) = (u_2^*, 0, 0) \tag{6.11.32}
$$

u_1^*, u_2^* 见(6.2.6)式.方程组(6.11.31)在平衡位置处的 Jacobi 矩阵为

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\gamma}(u^* - c) & -\dfrac{\alpha}{\gamma} & -\dfrac{\beta}{\gamma} \end{pmatrix} \tag{6.11.33}
$$

从而求得在平衡位置 $(u_1^*, v_1^*, w_1^*) = (u_1^*, 0, 0)$ 和 $(u_2^*, v_2^*, w_2^*) =$

$(u_2^*,0,0)$的特征方程分别为

$$\lambda^3 - \frac{\beta}{\gamma}\lambda^2 + \frac{\alpha}{\gamma}\lambda + \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\gamma} = 0 \qquad (6.11.34)$$

和

$$\lambda^3 + \frac{\beta}{\gamma}\lambda^2 + \frac{\alpha}{\gamma}\lambda - \frac{\sqrt{c^2+2A}}{\gamma} = 0 \qquad (6.11.35)$$

(6.11.34)式和(6.11.35)式都是关于λ的三次代数方程.根的性质分别决定于

$$R = \frac{(4-\delta)\alpha^3}{108\gamma^3\varepsilon^2}\left\{\left[\varepsilon - \frac{9-2\delta}{4(4-\delta)}\right]^2 - \frac{(\delta-3)^2}{4\delta(4-\delta)^2}\right\} \qquad (6.11.36)$$

和

$$S = \frac{(4-\delta)\alpha^3}{108\gamma^3\varepsilon^2}\left\{\left[\varepsilon + \frac{9-2\delta}{4(4-\delta)}\right]^2 - \frac{(\delta-3)^2}{4\delta(4-\delta)^2}\right\} \qquad (6.11.37)$$

在(6.11.36)式和(6.11.37)式中

$$\delta \equiv \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}, \quad \varepsilon \equiv \frac{\alpha^2}{4\beta\sqrt{c^2+2A}} \qquad (6.11.38)$$

当$R\leqslant 0$时,方程(6.11.34)有三实根,$(u_1^*,0,0)$为结点或鞍-结点;当$R>0$时,方程(6.11.34)有一实根和二共轭复根,$(u_1^*,0,0)$为焦点或鞍-焦点.类似,当$S\leqslant 0$时,方程(6.11.35)有三实根,$(u_2^*,0,0)$为结点或鞍-结点;$S>0$时,方程(6.11.35)有一实根和二共轭复根,$(u_2^*,0,0)$为焦点或鞍-焦点.

因为,在(6.11.11)式和(6.11.12)式的条件下,$R>0$,$S>0$,所以,由(6.11.15)式表征的就是冲击波解,是连接两个平衡点的异宿轨道;而在(6.11.18)式(或(6.11.25)式)和(6.11.19)式(或(6.11.26)式)的条件下,$R<0$,$S>0$,所以,由(6.11.22)式(或(6.11.29)式)表征的是孤立波解,是从$(u_1^*,0,0)$出发又回到该点的同宿轨道.

6.12 非线性 Schrödinger(NLS)方程

在(1.2.16)式中已经标记过的非线性 Schrödinger 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0 \tag{6.12.1}$$

很有意思的是,非线性 Schrödinger 方程(6.12.1)也有通常只有线性方程才具有的形式为

$$u=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \tag{6.12.2}$$

的单波解.其中 A,ω 和 k 分别为振幅,圆频率和波数.

(6.12.2)式代入方程(6.12.1)很快得到频散关系为

$$\omega=\alpha k^2-\beta|A|^2 \tag{6.12.3}$$

它说明:非线性波的频散关系既与波数有关,又与振幅有关.由此求得群速度为

$$c_g\equiv\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=2\alpha k \tag{6.12.4}$$

因(6.12.3)式是根据(6.12.2)式得到的,所以(6.12.3)式可视为非线性 Schrödinger 方程(6.12.1)的最低阶的近似,相应(6.12.2)式是它的最低阶的解.

因非线性 Schrödinger 方程通常表征非线性的调制作用,所以,我们常求它的包络波形式解,即设解为

$$u=\phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\quad \xi=x-c_gt \tag{6.12.5}$$

(6.12.5)式代入方程(6.12.1),得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}(2\alpha k-c_g)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+(\omega-\alpha k^2)\phi+\beta\phi^3=0 \tag{6.12.6}$$

通常我们要求 $\phi(\xi)$ 是实函数形式,故要求 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$ 前的复系数为零,而这恰好是(6.12.4)形式.又考虑(6.12.3)式,我们设方程(6.12.6)中 ϕ 前的系数

$$\omega - ak^2 = -\gamma \quad (\gamma > 0) \tag{6.12.7}$$

这样,方程(6.12.6)就简化为

$$-\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \gamma\phi - \beta\phi^3 = 0 \tag{6.12.8}$$

此方程与(6.4.51)式相似,将(6.4.51)式中的 $c^2 - c_0^2, \alpha, \beta$ 分别改为 $-\alpha, \gamma, \beta, u$ 改为 ϕ,就变成了(6.12.8)式.则类似地分析,我们得到下列结果.

对于 $\alpha<0, \beta>0$ 的情况,我们有

$$\phi = \pm k\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(1+k^2)}}\,\mathrm{sn}\left[\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha(1+k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.12.9}$$

当 $k\to1$ 时,它化为

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\tanh\sqrt{-\frac{\gamma}{2\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{6.12.10}$$

对于 $\alpha>0, \beta>0$ 的情况,我们有

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(2-k^2)}}\,\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha(2-k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.12.11}$$

当 $k\to1$ 时,它化为

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\,\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{6.12.12}$$

对于 $\alpha>0, \beta<0$ 的情况,我们有

$$\phi = \pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\beta(2-k^2)}}\,\mathrm{cs}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha(2-k^2)}}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{6.12.13}$$

当 $k\to1$ 时,它可化为

$$\phi = \pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\beta}}\,\mathrm{csch}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{6.12.14}$$

(6.12.9)式、(6.12.11)式和(6.12.13)式就是 NLS 方程(6.12.1)振幅的椭圆函数解，而(6.12.10)式、(6.12.12)式和(6.12.14)式就是 NLS 方程(6.12.1)振幅的孤立波解.

将 ϕ 代入(6.12.5)式就求得了 NLS 方程(6.12.1)的解. 例如，将(6.12.12)式代入(6.12.5)式，求得

$$u=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0)\cdot e^{i(kx-\omega t)} \qquad (6.12.15)$$

它称为 NLS 方程(6.12.1)的包络孤立波(envelope solitary waves)解，其图象见图 6-11.

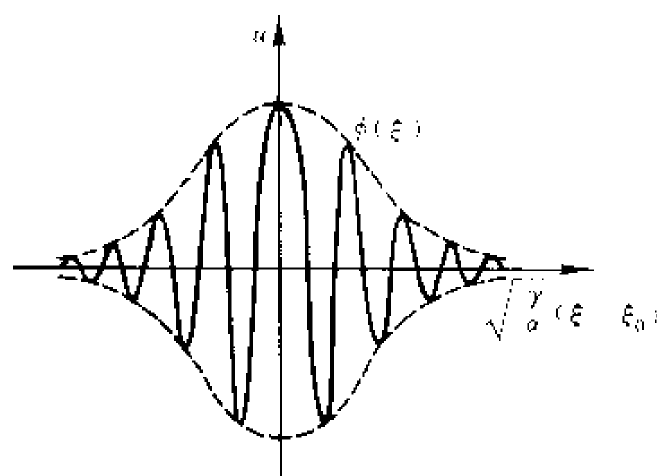


图 6-11

由(6.12.15)式知，包络孤立波解的振幅为

$$a=\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}} \qquad (6.12.16)$$

这样，(6.12.15)式可以改写为

$$u=\pm a\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}a(\xi-\xi_0)\cdot e^{i(kx-\omega t)} \quad (\xi\equiv x-c_g t) \qquad (6.12.17)$$

其中

$$\omega = \alpha k^2 - \gamma = \alpha k^2 - \frac{\beta}{2} a^2 \tag{6.12.18}$$

此式比(6.12.3)式更准确.

考虑由(6.12.7)式求得的群速度仍为(6.12.4)式,这样,我们可以把(6.12.18)式改写为

$$\omega = \frac{c_g^2}{4\alpha} - \frac{\beta}{2} a^2 \tag{6.12.19}$$

而(6.12.17)式可以改写为

$$u = \pm a \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} a(\xi - \xi_0) \cdot e^{i\left(\frac{c_g}{2\alpha}\xi - nt\right)} \tag{6.12.20}$$

其中

$$n \equiv \omega - \frac{c_g^2}{2\alpha} = -\frac{c_g^2}{4\alpha} - \frac{\beta}{2} a^2 \tag{6.12.21}$$

6.13 Zakharov 方程

在(1.2.22)式中已经标记过的 Zakharov 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta \dfrac{\partial^2 |v|^2}{\partial x^2} \\ i \dfrac{\partial v}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \delta u v = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta > 0) \tag{6.13.1}$$

考虑 v 是电场强度的慢变振幅,我们设它为包络波解,而离子数密度偏差 u 取为一般行波解.即令

$$u = u(\xi), \quad v = \phi(\xi) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \xi = x - c_g t \tag{6.13.2}$$

(6.13.2)代入方程(6.13.1)得到

$$\begin{cases} (c_g^2 - c_s^2) \dfrac{d^2 u}{d\xi^2} = \beta \dfrac{d^2 \phi}{d\xi^2} \\ \alpha \dfrac{d^2 \phi}{d\xi^2} + i(2\alpha k - c_g) \dfrac{d\phi}{d\xi} + (\omega - \alpha k^2)\phi - \delta u \phi = 0 \end{cases} \tag{6.13.3}$$

(6.13.3)的第一个方程直接积分，取积分常数为零，得

$$(c_g^2 - c_s^2)u = \beta\phi^2 \tag{6.13.4}$$

由此可见，对于实函数 ϕ 上式成立要求 u 与 $c_g^2 - c_s^2$ 有同样的符号。即 $c_g < c_s$(亚声速)时，u 取负号，$c_g > c_s$(超声速)时，u 取正号。

(6.13.4)式代入(6.13.3)的第二个方程有

$$\alpha\frac{d^2\phi}{d\xi^2} - i(2\alpha k - c_g)\frac{d\phi}{d\xi} + (\omega - \alpha k^2)\phi - \frac{\beta\delta}{c_g^2 - c_s^2}\phi^3 = 0 \tag{6.13.5}$$

其形式同方程(6.12.6)。类似，我们令

$$k = \frac{c_g}{2\alpha}, \quad \omega - \alpha k^2 = -\gamma \quad (\gamma > 0) \tag{6.13.6}$$

则方程(6.13.5)化为

$$-\alpha\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \gamma\phi - \frac{\beta\delta}{c_s^2 - c_g^2}\phi^3 = 0 \tag{6.13.7}$$

其形式同方程(6.12.8)。

参考(6.12.12)式，显然，当 $\alpha>0$、$\beta>0$ 和 $\delta>0$ 及 $c_g^2<c_s^2$(亚声速)的条件下，方程(6.13.7)有下列关于 ϕ 的孤立波解：

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{2\gamma(c_s^2 - c_g^2)}{\beta\delta}}\,\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{6.13.8}$$

(6.13.8)式代入(6.13.2)式和(6.13.4)式，求得 v 和 u

$$v = \pm\sqrt{\frac{2\gamma(c_s^2 - c_g^2)}{\beta\delta}}\,\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0)\cdot e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.13.9}$$

$$u = -\frac{2\gamma}{\delta}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{6.13.10}$$

(6.13.9)式表示 v 是一个包络孤立波解，而(6.13.10)式显示 u 为一孤立波解。当 $\delta>0$ 时，关于 u 的孤立子移动是亚声速的，而且 u 是负值，它称为 Langmuir 坑孤立子(pit soliton)；而当 $\delta<0$ 和 $c_g^2>c_s^2$(超声速)的条件下，上述解仍然适用，但此时 u 是正值，它称

为 Langmuir 哨孤立子(whistler soliton). 若它描写非线性光波，称为光孤立子(optical soliton).

6.14 Landau-Lifshitz 方程

在(1.2.24)式中已经标记过的 Landau-Lifshitz 方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(v\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \beta H_0 v \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \alpha\left(w\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \beta H_0 u \quad (\alpha,\beta > 0) \\[2ex]
\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left(u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)
\end{cases}
\tag{6.14.1}
$$

为了求解方程(6.14.1)，我们首先对未知函数(u,v,w)作球坐标变换. 注意$u^2+v^2+w^2=|\mathbf{S}|^2=S^2$($S$为常数)，则这种变换应为

$$
\begin{cases}
u = S\sin\theta\cos\varphi \\
v = S\sin\theta\sin\varphi \\
w = S\cos\theta
\end{cases}
\tag{6.14.2}
$$

其中θ和φ均是x和t的函数. 因为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = S\left(\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial x} = S\left(\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S\left[-\sin\theta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - 2\cos\theta\sin\varphi\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right. \\[2ex]
\qquad\left. + \cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \sin\theta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]
\end{cases}
\tag{6.14.3}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} = S\left[\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right] \\
\dfrac{\partial v}{\partial x} = S\left[\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right] \\
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = S\left[-\sin\theta\sin\varphi\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + 2\cos\theta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right. \\
\qquad\qquad \left. + \cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \sin\theta\sin\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]
\end{cases}
\tag{6.14.4}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} = -S\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial t} \\
\dfrac{\partial w}{\partial x} = -S\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \\
\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -S\left[\cos\theta\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \sin\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]
\end{cases}
\tag{6.14.5}
$$

则方程(6.14.1)化为

$$
\begin{cases}
\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \alpha S\left[-\sin\varphi\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - 2\cos^2\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right. \\
\qquad \left. + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] + \beta H_0\sin\theta\sin\varphi \\
\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \alpha S\left[\cos\varphi\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - 2\cos^2\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right. \\
\qquad \left. - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] - \beta H_0\sin\theta\cos\varphi \\
-\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha S\left[2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin^2\theta\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]
\end{cases}
\tag{6.14.6}
$$

(6.14.6)的第三式消去 $\sin\theta$(或者(6.14.6)的第一式乘以 $\cos\varphi$,第二式乘以 $\sin\varphi$,然后相加)得到一个方程;另一个方程为(6.14.6)的第一式乘以 $-\sin\varphi$,第二式乘以 $\cos\varphi$,然后相加而得. 这样,方程(6.14.6)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha S\left(-2\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \sin\theta\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \\ \sin\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \alpha S\left[\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] - \beta H_0\sin\theta \end{cases}$$

(6.14.7)

(6.14.7)的第一式乘以 $\sin\theta$,第二式适当调换位置,则方程(6.14.7)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\cos\theta}{\partial t} = \alpha S\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\ \alpha S\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \sin\theta\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha S\cos\theta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \beta H_0\right] \end{cases} \qquad (6.14.8)$$

其次,我们求方程组(6.14.8)的行波解,即令

$$\theta = \theta(\xi), \quad \varphi = \varphi(\xi), \quad \xi = x - ct \qquad (6.14.9)$$

代入方程组(6.14.8),则它化为

$$\begin{cases} -c\dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\xi} = \alpha S\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\sin^2\theta\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right) \\ \alpha S\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2} = \sin\theta\left[-c\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} + \alpha S\cos\theta\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \beta H_0\right] \end{cases}$$

(6.14.10)

方程(6.14.10)的第一式两边对 ξ 积分得到

$$\alpha S\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} = c\cos\theta - A \qquad (6.14.11)$$

其中 A 为积分常数.我们考虑 $\theta = 0$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}$ 有界,则由方程(6.14.11)定得 $A=c$,因而方程(6.14.11)化为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\gamma(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{\gamma}{1+\cos\theta} \qquad (6.14.12)$$

其中

$$\gamma = \frac{c}{\alpha S} \qquad (6.14.13)$$

(6.14.12)式代入方程组(6.14.10)的第二式,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2} = \sin\theta\left[\delta^2 - \frac{\gamma^2}{(1+\cos\theta)^2}\right] \tag{6.14.14}$$

其中

$$\delta^2 = \frac{\beta H_0}{aS} \tag{6.14.15}$$

方程(6.14.14)的两边乘以 $2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}$,并对 ξ 积分得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -2\left(\delta^2\cos\theta + \frac{\gamma^2}{1+\cos\theta}\right) + B \tag{6.14.16}$$

其中 B 为积分常数. 我们又考虑 $\theta=0$ 时,$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}=0$,从而定得 $B=2\delta^2+\gamma^2$,因而方程(6.14.16)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 4\delta^2 \cdot \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\left(\frac{1+\cos\theta}{2} - \frac{\gamma^2}{4\delta^2}\right) \tag{6.14.17}$$

注意 $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$,$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$,方程(6.14.17)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \delta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(b^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{6.14.18}$$

其中

$$b^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{4\delta^2} \quad (0<\gamma^2<4\delta^2, 0<b^2<1) \tag{6.14.19}$$

若令

$$y = \sin\frac{\theta}{2} \tag{6.14.20}$$

则方程(6.14.18)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \delta^2 y^2(b^2 - y^2) \tag{6.14.21}$$

方程(6.14.21)在形式上同方程(2.3.198)($a_2=b^2\delta^2$,$a_4=-\delta^2$),则根据(2.3.199)式可知,方程(6.14.21)的解为

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm b\,\mathrm{sech}\,b\delta(\xi-\xi_0) \tag{6.14.22}$$

其中 ξ_0 为积分常数. 由(6.14.22)式求得

$$\cos\theta = 1 - 2b^2\operatorname{sech}^2[b\delta(\xi - \xi_0)] \qquad (6.14.23)$$

这是孤立子形式解.(6.14.23)式代入方程(6.14.12)有

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\gamma}{2}\left[1 + \frac{b^2\operatorname{sech}^2 b\delta(\xi - \xi_0)}{1 - b^2\operatorname{sech}^2 b\delta(\xi - \xi_0)}\right] \qquad (6.14.24)$$

积分上式求得 φ 为

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\gamma}{2}(\xi - \xi_0) + \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}\tanh b\delta(\xi - \xi_0)\right]$$

$$(6.14.25)$$

其中 φ_0 为 $\xi=\xi_0$ 时 φ 的值.

根据(6.14.23)式和(6.14.25)式可以求得磁化强度 $\boldsymbol{S}(u,v,w)$. 为此,常称由(6.14.23)式表征的孤立子为磁孤立子(magnetic soliton),$2b^2$($0<2b^2<2$)称为磁孤立子的振幅.

应当指出:当 $\beta=0$ 时,方程(6.14.1)没有孤立子解.

6.15 Ginzburg-Landau 方程

在(1.2.17)式中已经标记过的 Ginzburg-Landau 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2 u - bu - \mathrm{i}au = 0 \qquad (6.15.1)$$

其中 a,b 为实数,α,β 通常为复数.

Ginzburg-Landau 方程应用很广,但求解复杂,我们分下列两种情况简单说明.

1. $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$,$\beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2$

此时的 Ginzburg-Landau 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2)|u|^2 u - bu - \mathrm{i}au = 0$$

$$(6.15.2)$$

与非线性 Schrödinger 方程(6.12.1)一样,它也有形式为

$$u = A e^{\mathrm{i}(kx - \omega t)} \qquad (6.15.3)$$

的单波解.

(6.15.3)式代入方程(6.15.2),定得

$$\omega = \alpha_1 k^2 - \beta_1 |A|^2 + b, \quad k^2 = \frac{1}{\alpha_2}(\beta_2 |A|^2 - a)$$

(6.15.4)

2. α,β 为实数,$a=0$

此时的 Ginzburg-Landau 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2 u - bu = 0 \qquad (6.15.5)$$

若令

$$u = v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \qquad (6.15.6)$$

则方程(6.15.5)化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta|v|^2 v = 0 \qquad (6.15.7)$$

这是关于 v 的非线性 Schrödinger 方程,它通常有包络孤立波解.

6.16 KP(Kadomtsev-Petviashvili)方程

在(1.2.26)式中已经标记过的 KP 方程,即二维浅水波的 KdV 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\beta > 0) \quad (6.16.1)$$

这里有两个空间自变量,则设它的行波解为

$$u = u(\theta), \quad \theta = kx + ly - \omega t \qquad (6.16.2)$$

这里 k 和 l 分别为 x 和 y 方向上的波数,ω 为圆频率.

(6.16.2)式代入方程(6.16.1)有

$$k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\omega\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + ku\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + \beta k^3\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\theta^3}\right) + \frac{c_0 l^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$$

(6.16.3)

上式两边对 θ 积分一次,取积分常数为零,得

$$-\omega k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}+k^2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^4\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\theta^3}+\frac{c_0l^2}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=0 \quad (6.16.4)$$

该方程两边再对 θ 积分一次，取积分常数为零，得到

$$-\omega ku+\frac{k^2}{2}u^2+\beta k^4\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{c_0l^2}{2}u=0 \qquad (6.16.5)$$

由此有

$$-\beta k^4\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\omega k-\frac{c_0}{2}l^2\right)u-\frac{k^2}{2}u^2=0 \qquad (6.16.6)$$

这是(6.4.46)式类型的方程. 将(6.4.46)式中的 $c^2-c_0^2$，α 和 β 分别改为 $-\beta k^4$，$\omega k-\frac{c_0}{2}l^2$ 和 $\frac{k^2}{2}$，ξ 改为 θ，就变成了(6.16.6)式.

因 $-\beta k^4<0$，$\frac{k^2}{2}>0$，则在 $\omega k-\frac{c_0}{2}l^2>0$ 的条件下，利用(6.4.47)式，求得方程(6.16.6)的解为

$$u=\begin{cases}\dfrac{3\left(\omega k-\dfrac{c_0}{2}l^2\right)}{k^2}\operatorname{sech}^2\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\omega k-\dfrac{c_0}{2}l^2}{\beta k^4}}(\theta-\theta_0)\right] & \left(0\leqslant u\leqslant\dfrac{3\left(\omega k-\dfrac{c_0}{2}l^2\right)}{k^2}\right)\\ -\dfrac{3\left(\omega k-\dfrac{c_0}{2}l^2\right)}{k^2}\operatorname{csch}^2\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\omega k-\dfrac{c_0}{2}l^2}{\beta k^4}}(\theta-\theta_0)\right] & (u\leqslant 0)\end{cases} \qquad (6.16.7)$$

这就是 KP 方程的孤立子解，其中 θ_0 为积分常数.

若取(6.16.7)式的根号内数值为 1，即

$$\omega=\beta k^3+\frac{c_0l^2}{2k}\text{①} \qquad (6.16.8)$$

---

① 此 KP 方程孤立子的频散关系与线性 KP 方程的频散关系是不同的. 但若设线性 KP 方程有解 $Ae^{kx+ly-\omega t}$，则可得到(6.16.8)式.

则(6.16.7)式可改写为

$$u=\begin{cases}3\beta k^2\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}(\theta-\theta_0) & (0\leqslant u\leqslant 3\beta k^2)\\ -3\beta k^2\operatorname{csch}^2\frac{1}{2}(\theta-\theta_0) & (u\leqslant 0)\end{cases}$$

(6.16.9)

6.17 准地转位涡度方程

在(1.2.27)式中已经标记过的正压准地转位涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \tag{6.17.1}$$

其中

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad q=f_0+\beta_0 y+\nabla_2^2\psi-\lambda_0^2\psi \tag{6.17.2}$$

方程(6.17.1)的行波解设为

$$\psi=\psi(\xi,y),\quad q=q(\xi,y),\quad \xi=x-ct \tag{6.17.3}$$

(6.17.3)式代入方程(6.17.1)有

$$(u-c)\frac{\partial q}{\partial\xi}+v\frac{\partial q}{\partial y}=0 \tag{6.17.4}$$

注意 $u-c=-\frac{\partial}{\partial y}(\psi+cy)$, $v=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$,则方程(6.17.4)可化为

$$J(\psi+cy,q)=0 \tag{6.17.5}$$

其中

$$J(A,B)=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial\xi} \tag{6.17.6}$$

为 Jacobi 算子.若令

$$\Psi=\psi+cy,\quad Q=\nabla_2^2\Psi-\lambda_0^2\Psi+(\beta_0-\lambda_0^2c)y \tag{6.17.7}$$

则方程(6.17.5)可以化为

$$J(\Psi, Q) = 0 \tag{6.17.8}$$

根据 Jacobi 算子的性质可知：(6.17.8)式成立要求 Q 是 Ψ 的任意函数，即

$$Q = F(\Psi) \tag{6.17.9}$$

我们考虑一个以原点$(\xi, y)=(0,0)$为中心、半径为 a 的圆形涡旋. 因在 Q 内有形式为 $\nabla_2^2-\lambda_0^2$ 的 Helmholtz 算子，则引入平面极坐标

$$\xi = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{6.17.10}$$

考虑流函数 ψ 应在 $r=0$ 有界，应在 $r\to\infty$ 趋于零，我们取 $F(\Psi)$ 为 Ψ 的下列线性函数：

$$F(\Psi) = \begin{cases} (-k^2 - \lambda_0^2)\Psi & (r < a) \\ (p^2 - \lambda_0^2)\Psi & (r > a) \end{cases} \tag{6.17.11}$$

其中 k 和 p 为常数. 这样，方程(6.17.9)对于圆内外分别化为

$$\nabla_2^2\Psi_1 - k^2\Psi_1 = -(\beta_0 - \lambda_0^2 c)y \quad (r < a) \tag{6.17.12}$$

$$\nabla_2^2\Psi_2 - p^2\Psi_2 = -(\beta_0 + \lambda_0^2 c)y \quad (r > a) \tag{6.17.13}$$

因而，非线性的准地转位涡度方程化成了线性方程.

方程(6.17.12)满足 $\Psi_1|_{r=0}<\infty$（当然，$\psi|_{r=0}<\infty$）的解为

$$\Psi_1 = -\frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c)}{k^2} r\sin\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{J}_m(kr)(A_m\cos m\theta - B_m\sin m\theta) \tag{6.17.14}$$

若要求 $\Psi_1|_{r=a}=$常数，则定得

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c)}{k^2 J_1(ka)}, \quad A_m = B_m = 0 \quad (m = 2,3,\cdots) \tag{6.17.15}$$

因而解(6.17.14)简化为

$$\Psi_1 = A_0\mathrm{J}_0(kr) - \left[r - a\frac{\mathrm{J}_1(kr)}{\mathrm{J}_1(ka)}\right]\frac{(\beta_0 - \lambda_0^2 c)}{k^2}\sin\theta \quad (r < a) \tag{6.17.16}$$

这里 $J_m(x)$ 为 m 阶的 Bessel 函数，A_0 为待定常数.

方程(6.17.13)满足 $\Psi_2|_{r\to\infty}\to cy=cr\sin\theta$（当然，$\psi|_{r\to\infty}\to 0$）的解为

$$\Psi_2=\frac{(\beta_0+\lambda_0^2 c)}{p^2}r\sin\theta+\sum_{m=0}^{\infty}K_m(pr)(C_m\cos m\theta+D_m\sin m\theta)$$

(6.17.17)

其中 $K_m(x)$ 为 m 阶的第二类变型 Bessel 函数，且

$$p^2=\frac{\beta_0}{c}+\lambda_0^2 \tag{6.17.18}$$

注意由(6.17.16)式 $\Psi_1|_{r=a}=A_0J_0(ka)$，若要求 $\Psi_2|_{r=a}=\Psi_1|_{r=a}$，则定得

$$C_0=A_0\frac{J_0(ka)}{K_0(pa)},\quad C_1=0,\quad D_1=-\frac{(\beta_0+\lambda_0^2 c)}{p^2K_1(pa)},\quad C_m=D_m=0$$

$$(m=2,3,\cdots) \tag{6.17.19}$$

因而解(6.17.17)简化为

$$\begin{aligned}\Psi_2&=A_0\frac{J_0(ka)}{K_0(pa)}K_0(pr)+\left[r-a\frac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\right]\frac{(\beta_0+\lambda_0^2c)}{p^2}\sin\theta\\&=A_0\frac{J_0(ka)}{K_0(pa)}K_0(pr)+\left[\frac{r}{a}-\frac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\right]ca\sin\theta\quad(r>a)\end{aligned}$$

(6.17.20)

在(6.17.16)式和(6.17.20)式中还有常数 A_0 和 k 需要确定. 设在 $r=a$ 处，$\frac{\partial\Psi}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ 连续，注意 $J_0'=-J_1$，$K_0'=-K_1$，$xJ_1'-J_1=-xJ_2$，$xK_1'-K_1=-xK_2$，则得到

$$\begin{cases}A_0k\dfrac{J_1(ka)}{J_0(ka)}=A_0p\dfrac{K_1(pa)}{K_0(pa)}\\-\left(\dfrac{1}{ka}\right)\dfrac{J_2(ka)}{J_1(ka)}=\left(\dfrac{1}{pa}\right)\dfrac{K_2(pa)}{K_1(pa)}\end{cases} \tag{6.17.21}$$

由此定得

$$A_0=0,\quad kJ_1(ka)K_2(pa)+pJ_2(ka)K_1(pa)=0$$

(6.17.22)

其中第二个方程可确定 k，所以，最终求得

$$\Psi = \begin{cases} -\left[\dfrac{r}{a} - \dfrac{J_1(kr)}{J_1(ka)}\right]\dfrac{p^2}{k^2}ca\sin\theta & (r < a) \\ \left[\dfrac{r}{a} - \dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\right]ca\sin\theta & (r > a) \end{cases} \tag{6.17.23}$$

而最终的准地转流函数解为

$$\psi = \begin{cases} ca\left[\dfrac{p^2 J_1(kr)}{k^2 J_1(ka)} - \left(1 + \dfrac{p^2}{k^2}\right)\dfrac{r}{a}\right]\sin\theta & (r < a) \\ -ca\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\sin\theta & (r > a) \end{cases} \tag{6.17.24}$$

ψ 的等值线图见图 6-12，它是一个南高北低的涡旋结构，称为正压准地转位涡度方程的偶极波(dipole waves)，简称为偶极子(modon)。

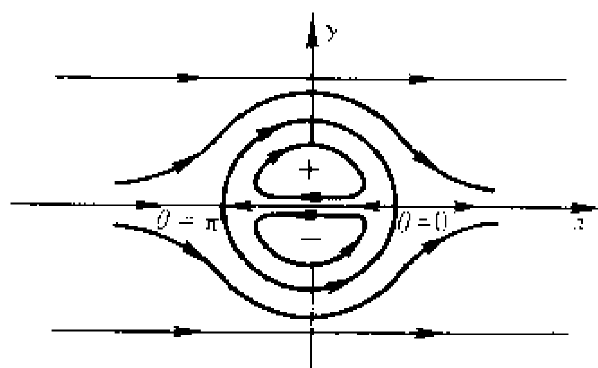


图 6-12

(6.17.23)式代入(6.17.12)式和(6.17.13)式求得相对涡度为

$$\zeta = \nabla_h^2\psi = \begin{cases} -cap^2\dfrac{J_1(kr)}{J_1(ka)}\sin\theta & (r < a) \\ -cap^2\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\sin\theta & (r > a) \end{cases} \tag{6.17.25}$$

由(6.17.2)式、(6.17.7)式和(6.17.9)式求得准地转位涡度为

$$
q=\begin{cases} f_0-(k^2+\lambda_0^2)(\psi+cy) \\ \qquad =f_0+\left(\dfrac{\beta_0}{c}-k^2-p^2\right)(\psi+cy) & (r<a) \\ f_0+(p^2-\lambda_0^2)(\psi+cy)=f_0+\dfrac{\beta_0}{c}(\psi+cy) & (r>a) \end{cases}
$$

(6.17.26)

习 题 6

6.1 证明下列 KdV 方程可以通过变换化为标准的 KdV 方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}=0$$

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (v=\alpha u,\xi=x)$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\beta<0) \quad (v=-u,\xi=-x)$

6.2 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\beta>0)$$

通过变换 $\xi=\beta^{1/3}x,v=\pm\frac{1}{6}\beta^{-1/3}u$ 可以化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}\pm 6v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}=0$$

6.3 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

作变换 $\xi=(3t)^{1/3}x,u=-(3t)^{2/3}U(\xi)$可以化为

$$U'''+(6U-\xi)U'-2U=0$$

6.4 证明 mKdV 方程

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\alpha>0,\beta>0)$

通过变换 $\xi=\beta^{-1/3}x, v=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{6}}\beta^{-1/6}u$ 可以化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+6v^2\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}=0$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\alpha<0, \beta>0)$

通过变换 $\xi=\beta^{-1/3}x, v=\pm\sqrt{\dfrac{-\alpha}{6}}\beta^{-1/6}u$ 可以化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}=0$$

6.5　证明线性 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

作变换 $u=(3\beta t)^{-1/3}U(\xi), \xi=(3\beta t)^{-1/3}(x-c_0 t)$ 可以化为下列 Airy 方程

$$U'''-(\xi U'+U)=0$$

由此证明线性 KdV 方程有一个解为

$$u=(3\beta t)^{-1/3}A_i(\xi)$$

其中 $A_i(\xi)$ 为 Airy 函数($U=A_i(\xi)$ 满足 $U''-\xi U=0$ 或 $U'''-(\xi U'+U)=0$).

6.6　上题若令

$$u=\int_\xi^\infty U(s)\mathrm{d}s, \quad \xi=(3\gamma t)^{-1/3}(x-c_0 t)$$

证明 $U(\xi)$ 满足 Airy 方程,并证明 $u=\int_\xi^\infty A_i(s)\mathrm{d}s$.

6.7　直接求 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

的椭圆余弦波解和孤立波解.

6.8　根据 mKdV 方程(6.6.1)的孤立波解,证明波速 c 与振幅 a 的平方成正比.

6.9 证明 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

通过变换：$\xi=\beta^{-1/3}x, v=-\frac{1}{6}\beta^{-1/3}u, \eta=\sqrt{\frac{6}{c_0}}\beta^{-1/6}y$ 可化为

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-6v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}\right)+3\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0$$

6.10 验证解

(1) $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad u=\frac{x}{t},\quad u=\frac{x}{t-A}$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\quad u=\frac{2}{x^2},\quad u=6x\cdot\frac{x^3-24t}{(x^3+12t)^2}$

(3) $\frac{\partial u}{\partial t}+6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\quad u=A-\frac{4A}{4A^2(x-6A^2t)^2+1}$

(4) $\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+|u|^2u=0, u=\frac{1-4(1+2\mathrm{i}t)}{1+2x^2+4t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

6.11 验证解

(1) $\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\quad u=-2k^2\mathrm{sech}^2\{k(x-4k^2t)\}$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}+(n+1)(n-2)u^n\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,$

$u^n=\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{n}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right\}$

(3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

$u=-\frac{1}{2}k^2\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}(kx+ly-\omega t)\right\}(\omega=k^3+3l^3/k)$

6.12 证明 KdV-Burgers 方程与 Fisher 方程可以互换

(1) KdV-Burgers 方程(6.10.1)求行波解所得常微分方程(6.10.3)(取 $A=0$)，作变换 $u=2c(1-v)$，可化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}-\frac{\beta}{\nu}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{c}{\nu}v(1-v)=0$$

其形式同 Fisher 方程(6.9.1)求行波解所得常微分方

程(6.9.2).

(2) Fisher 方程(6.9.1)求行波解所得常微分方程(6.9.2)作变换 $u=1-\frac{v}{2c}$ 可化为

$$-cu+\frac{1}{2}u^2+\frac{c^2}{k}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\nu c}{k}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}=0$$

其形式同 KdV-Burgers 方程(6.10.1)求行波解所得常微分方程(6.9.3).

6.13 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

作变换 $u=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2$(称为 Miura 变换)可以化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0$$

6.14 若称

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

为守恒律,ρ 称为密度,F 称为通量.试求下列方程的一个守恒律,并指出密度和通量.

(1) 平流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$

(2) Burgers 方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

(3) KdV 方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

(4) mKdV 方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

(5) KdV-Burgers 方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

(6) NLS 方程 $\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0$

6.15 证明 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0$$

通过变换 $t = \frac{\sqrt{\alpha}}{c_0^2} t'$， $x = \frac{\sqrt{\alpha}}{c_0} x'$， $u = \frac{3c_0^2}{\beta} u'$ 化为

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^4 u'}{\partial x'^4} - 3 \frac{\partial^2 u'^2}{\partial x'^2} = 0$$

6.16 证明 NLS 方程

$$\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u = 0$$

通过变换 $x = \sqrt{\alpha}\, x'$,$u = \sqrt{\frac{2}{\beta}} u'$ 化为

$$\mathrm{i} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + 2 |u'|^2 u' = 0$$

6.17 求等离子体中暖电子与冷离子碰撞时满足的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

的行波解.

6.18 求弹性介质中的非线性波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

的行波解.

6.19 证明正弦-Gordon 方程与 mKdV 方程可以互换

(1) 正弦-Gordon 方程(6.4.1)求行波解所得常微分方程(6.4.3),作变换 $v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$ 可化为

$$A_1 m^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{3}{2} v^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \quad (A_1 \text{ 为积分常数})$$

其形式同 mKdV 方程(6.6.1)求行波解所得常微分方程(6.6.2).

(2) mKdV 方程(6.6.1)求行波解所得常微分方程(6.6.3),若作变换 $v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$, $w = \frac{\alpha}{3\beta} u^2 - \frac{c}{\beta}$,有: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = -uw$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}$

$=\frac{2\alpha}{3\beta}uv$；再令 $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\sqrt{\frac{2\alpha}{3\beta}}u$，有：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta}=-\sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha}}w$，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\eta}=\sqrt{\frac{2\alpha}{3\beta}}v$；这样就得

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\eta^2}+w=0$$

因而有 $w=-\frac{c}{\beta}\cos\eta$，$v=\sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha}}\cdot\frac{c}{\beta}\sin\eta$，从而化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{c}{\beta}\sin\eta=0$$

其形式同正弦-Gordon 方程(6.4.1)求行波解所得常微分方程(6.4.3).

6.20 设 $u=\frac{Be^{b(\xi-\xi_0)}}{1+e^{a(\xi-\xi_0)}}$代入 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

求解.

6.21 设 $u=\phi(x)e^{i\frac{\beta}{2}t}$代入非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0$$

求解.

6.22 求双曲正弦-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}=\sinh u$$

的孤立波解.

6.23 求 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)+3\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

的孤立波解.($\omega=k^3+3l^2/k$)

6.24 在正弦-Gordon 方程(6.4.1)中，若取 $\sin u=u-\frac{1}{3}u^3$，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_0^2\left(u-\frac{1}{3}u^3\right)=0$$

求它的行波解.

6.25　对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

证明它有孤立子解

$$u=2k^2\mathrm{csch}^2 k(x-4k^2 t)$$

并证明 $k\to 0$(x,t 固定)时,$u\to 2/x^2$.

*6.26　证明 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+|u|^2 u=0$$

有下列所谓 Ma 孤立子解:

$$u=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2 t}\left\{1+\frac{2m(m\cos\theta+\mathrm{i}n\sin\theta)}{n\cosh(\sqrt{2}\,max)+\cos\theta}\right\}$$

其中 a,m 为实数,$n^2=1+m^2$,$\theta=2mna^2 t$

提示:设 $u=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2 t}(1+A+\mathrm{i}B)$,$A$、$B$ 为实函数

*6.27　证明 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

通过变换 $u=\frac{\partial w}{\partial x}$($|x|\to\infty,w\to 0$)和 $\phi=\tan\frac{w}{2}$ 化为

$$(1+\phi^2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)+6\frac{\partial\phi}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]=0$$

并证明 u 有下列呼吸子(breather)或双子(bion)解

$$u=-2\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\left[\frac{k_2\sin(k_1 x-\omega_1 t+\delta_1)}{k_1\cosh(k_2 x-\omega_2 t+\delta_2)}\right]$$

其中

$$-\omega_1=k_1(k_1^2-3k_2^2),\qquad -\omega_2=k_2(3k_1^2-k_2^2)$$

δ_1 和 δ_2 是任意常数.

6.28　求解下列耦合方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_1}{d\xi^2} = \phi_1^3 - \phi_1 + \beta\phi_1\phi_2^2 \\ \phi_2^2 = \dfrac{1 - 2\alpha^2}{\beta}(1 - \phi_1^2) \end{cases} \qquad (\alpha^2 > 0, \beta > 0, \xi = x - ct)$$

6.29　利用(6.4.39)式，证明正弦-Gordon 方程(6.4.1)的下列解

(1) $\alpha=0, \gamma=0, \beta<0$

$$u = 4\tan^{-1}\left[e^{\pm n(x-ct)}\right]$$

(2) $\alpha=0, \gamma\neq 0, \beta<0$

$$u = 4\tan^{-1}\left[\frac{c}{c_0} \cdot \frac{\sinh nx}{\cosh nct}\right]$$

其中

$$n^2 = (1-\beta)\lambda_0^2, \quad \lambda_0 = f_0/c_0, \quad c^2 = c_0^2 - \frac{f_0^2}{n^2}$$

6.30　简化的 Maxwell Bloch 方程组为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = s, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = Eu + \alpha r, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\alpha s, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -Es$$

(1) 证明：当 $\alpha=0$ 时，方程组化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E^2 u - \frac{1}{E}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} - Eu = 0$$

并证明：它有解 $u=\cos\phi, E=\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$，而 ϕ 满足下列正弦-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \sin u$$

(2) 证明：当 $\alpha\neq 0$ 时，若 $x\to\pm\infty$ 时，$E, r, s\to 0, u\to -1$，则有下列孤立波解

$$E = a\,\mathrm{sech}\left[\frac{1}{2}a(x - ct) + \delta\right]$$

其中

$$c = \frac{4}{a^2 + 4\alpha^2}$$

a 和 δ 为积分常数.

6.31　证明 KPI 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

有下列 Zakharov-Manakov 有理孤立子(rational soliton)解

$$u=-4\cdot\frac{p^2y^2-\xi^2+p^{-2}}{(p^2y^2+\xi^2+p^{-2})^2}$$

其中 $\xi=p^{-1}+x-3p^2t$, p 为实常数.

6.32　Gardner 方程(混合的 KdV-mKdV 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

证明：令

$$v=u+\frac{\alpha}{2\beta},\quad \xi=x+\frac{\alpha^2}{4\beta}t,\quad \tau=t$$

可化为 $v(\xi,\tau)$ 的 mKdV 方程.

6.33　求 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u|u|^2=0$$

的下列形式的行波解

$$u=\phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta(\xi)+nt]},\quad \xi=x-ct$$

其中 c 和 n 是实常数，$\phi(\xi)$ 和 $\theta(\xi)$ 是实函数. 并证明

$$\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=2F(\psi),\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2}\left(c+\frac{A}{\psi}\right)\quad (\psi=\phi^2)$$

其中

$$F(\psi)\equiv\psi^3-2\left(n-\frac{1}{4}c^2\right)\psi^2+B\psi+A$$

A 和 B 是实的积分常数. 说明在行波解中的孤立波解为

$$u=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}c\xi-nt\right)}\operatorname{sech}\frac{a}{\sqrt{2}}\xi\quad\left(a^2=2\left(n-\frac{1}{4}c^2\right)>0\right)$$

*6.34 求另一类 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0$$

的行波解

$$u = \phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta(\xi) - nt]}, \quad \xi = x - c_g t$$

并证明孤立波解为

$$\phi^2(\xi) = m - 2k^2\mathrm{sech}^2 k\xi$$

$$\cot\theta(\xi) = -2k\tanh k\xi$$

其中 $m = -n$，$k = \frac{1}{2}\sqrt{2m - c_g^2}$ $\left(m > \frac{1}{2}c_g^2\right)$.

*6.35 求反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku(1 - u^m)(u^m - \alpha) = 0$$

的行波解.

提示：令 $u = u(\xi)$，$\xi = x - ct$ 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = au(1 - u^m)$.

*6.36 求反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku(1 - u^m) = 0$$

的行波解.

提示：设 $u = \frac{B}{[1 + \mathrm{e}^{a(\xi - \xi_0)}]^{2/m}}$

6.37 求反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku(1 - u)(u - \alpha) = 0$$

的行波解.

提示：令 $u = u(\xi)$，$\xi = x - ct$ 和 $u = A + \frac{B}{1 + \mathrm{e}^{a(\xi - \xi_0)}}$.

第 7 章　相似变换和自相似解

尽管我们从第 2 章开始，已经求得了不少非线性方程的准确解．但应该说，我们求得准确解的那些方程相对于大量的非线性方程来讲还是很小的，而且求解方法也是很有限的．所以，更多的非线性方程只能求近似解或确定解的渐近行为．

一个非线性偏微分方程可以通过相似变换化为一个常微分方程去求解．而且，如果这样的常微分方程具有 Painleve 性质，那么，这样的非线性偏微分方程应是可积的，至少应能通过相似变换求渐近解．

7.1　活动奇点和 Painleve 性质

非线性方程与线性方程有很大的不同．从解的角度去分析，线性方程的解只存在固定奇点，它完全由方程的系数所确定，与方程的初始条件或边界条件无关．但非线性方程的解有更丰富的奇异性，除可能存在固定奇点外，还可能存在活动奇点(movable singular point)，它完全由方程的初始条件或边界条件所决定．下面举二例说明．

例 1　线性方程

$$y' = \frac{y}{1-x} \tag{7.1.1}$$

很易直接积分求得通解为

$$y = \frac{A}{1-x} \tag{7.1.2}$$

其中 A 为积分常数．显然，$x=1$ 是(7.1.2)式中 y 的极点．而且，

方程(7.1.1)如给出条件

$$y|_{x=x_0}=y_0 \tag{7.1.3}$$

则由(7.1.2)式定得 $A=y_0(1-x_0)$，因而(7.1.2)式改写为

$$y=y_0\left(\frac{1-x_0}{1-x}\right) \tag{7.1.4}$$

它也只有一个奇点($x=1$)。因此条件(7.1.3)并不影响线性方程解的奇异性，所以 $x=1$ 称为固定奇点.

例 2 非线性方程

$$y'=y^2 \tag{7.1.5}$$

也很易直接求得其解为

$$y=\frac{1}{B-x} \tag{7.1.6}$$

其中 B 为积分常数。显然，$x=B$ 是(7.1.6)式中 y 的极点。同样，若方程(7.1.5)给了条件(7.1.3)，则定得 $B=x_0+\frac{1}{y_0}$，因而(7.1.6)式可改写为

$$y=\frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)} \tag{7.1.7}$$

它存在一个简单极点 $x=\frac{1+x_0y_0}{y_0}$，但这个奇点依赖于方程所给的条件，它称为活动奇点.

非线性方程的活动奇点也可能是支点或本性奇点，现举二例说明.

例 1 非线性方程

$$y'=e^{-y} \tag{7.1.8}$$

我们很容易求得它的通解为

$$y=\ln(x-x_0) \tag{7.1.9}$$

其中 x_0 为任意常数，但它是一活动奇点且是对数分支点.

例 2 非线性方程

$$y'=-y(\ln y)^2 \tag{7.1.10}$$

它的通解也很容易求得为

$$y = e^{\frac{1}{x-x_0}} \tag{7.1.11}$$

其中 x_0 为任意常数，但它是一活动奇点且是本性奇点.

活动支点和本性奇点统称为活动临界点(movable critical point).

许多非线性方程的活动奇点如是简单极点，则可以根据方程中的非线性项确定极点的阶数，现也举二例说明.

例 1 Riccati 方程

$$y' = y^2 + x \tag{7.1.12}$$

设 $x=a$ 是它的活动奇点，则当 $x\to a$ 时，其主要表现为 $y\to \frac{A}{(x-a)^b}$，其中 b 是极点的阶数. 因此，我们设

$$y = \frac{A}{(x-a)^b} \tag{7.1.13}$$

它称为主项分析.

(7.1.13)式代入方程(7.1.12)，得到

$$bA(x-a)^{-(b+1)} = A^2(x-a)^{-2b} + x \tag{7.1.14}$$

比较上式两边的奇异项有 $b=1, A=-1$. 因而，方程(7.1.12)的主项为

$$y = \frac{1}{x-a} \tag{7.1.15}$$

即方程(7.1.12)的活动奇点为单极点.

例 2 Painleve 的 P_{I} 型方程

$$y'' = 6y^2 + x \tag{7.1.16}$$

类似，设 $x=a$ 是它的活动奇点，应用主项分析，将(7.1.13)式代入方程(7.1.16)，得到

$$Ab(b+1)(x-a)^{-(b+2)} = 6A^2(x-a)^{-2b} + x \tag{7.1.17}$$

比较上式两边的奇异项有 $b=2, A=1$. 因而，方程(7.1.16)的主项

为

$$y = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{7.1.18}$$

即方程(7.1.16)的活动奇点为二阶极点.

可以证明：由 Painleve 所设定的形式为(1.1.9)式的 Painleve 方程的活动奇点不包含任何活动临界点，全都是简单极点. 如果一个常微分方程的所有活动奇点都是简单极点，则称此方程具有 Painleve 性质(Painleve property).

也可以证明：如果一个非线性偏微分方程能用散射反演法(见第9章)或相似变换去求解，那么惟一只有由这类方法化成的常微分方程具有 Painleve 性质. 而且，这样的一类非线性偏微分方程通常也是可积的.

7.2 相似变换和自相似解

设 $u(x,t)$ 是偏微分方程

$$Pu = 0 \tag{7.2.1}$$

的解. 我们考虑新的自变量 x' 和 t' 分别代替 x 和 t，新的因变量 u' 代替 u. 并要求 $u'(x',t')$ 也满足方程(7.2.1)，它称为不变变换.

为了实现这种变换，我们选取小参数 ε，并将 x'，t' 和 u' 均按小参数 ε 展开，即

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon X(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ t' = t + \varepsilon T(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ u' = u + \varepsilon U(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{7.2.2}$$

其中 X，T 和 U 分别为 x'，t' 和 u' 的一阶小项的系数，(7.2.2)式称为无穷小变换(infinitesimal transformation). 因为

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t' - t) + \cdots \\ &= u + \varepsilon\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial u}{\partial t}\right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

因而将(7.2.2)的第二式与(7.2.3)式比较有

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+T\frac{\partial u}{\partial t}=U \tag{7.2.4}$$

它称为不变变换条件. 方程(7.2.4)是关于 u 的一阶偏微分方程，其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{X}=\frac{\mathrm{d}t}{T}=\frac{\mathrm{d}u}{U} \tag{7.2.5}$$

由于 X、T 和 U 通过不变变换条件(7.2.4)联系在一起，因而 X，T 和 U 三者中只有两个是独立的，不失一般性，可设 $T=1$，则不变变换条件(7.2.4)可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=U-X\frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.2.6}$$

而特征方程(7.2.5)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{X}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{U} \tag{7.2.7}$$

其中 X 和 U 可以根据 u 和 u' 满足的方程(7.2.1)求得. 而由方程(7.2.7)的第一个等式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X \tag{7.2.8}$$

积分可求得

$$f(x,t)=\text{常数} \tag{7.2.9}$$

由方程(7.2.7)的第二个等式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=U \tag{7.2.10}$$

积分可求得

$$g(x,t,u)=\text{常数} \tag{7.2.11}$$

根据(7.2.9)式和(7.2.11)式可引入两个变量 ξ 和 v：

$$\xi=f(x,t),\quad v=g(x,t,u) \tag{7.2.12}$$

ξ 和 v 称为相似变量，(7.2.12)式称为相似变换(Similarity transformation). (7.2.12)式代入方程(7.2.1)得到 v 关于 ξ 的常微分

方程通常具有 Painleve 性质，由它解出 v，再由 $v=g(x,t,u)$ 求出的 u 通常称为方程(7.2.1)的自相似解(self-similar solution).

相似变换(7.2.12)的通常形式为

$$\xi = \alpha(t)x, \quad v(\xi) = \frac{1}{\beta(t)}u \tag{7.2.13}$$

这意味着，在变换中要求 $\alpha(t)x$ 和 $\frac{u}{\beta(t)}$ 分别保持常数. 所以，自相似解的通常形式为

$$u(x,t) = \beta(t)v(\alpha(t)x) \tag{7.2.14}$$

而最常见的 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 是 t 的幂函数形式，如

$$\alpha(t) = t^m, \quad \beta(t) = t^n \tag{7.2.15}$$

其中 m 和 n 为常数. 这样，相似变换(7.2.13)式化为

$$\xi = xt^m, \quad v = ut^n \tag{7.2.16}$$

在变换中要求 xt^m 和 ut^n 分别保持不变. 下面举二例说明.

例 1 线性热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\nu = 常数) \tag{7.2.17}$$

若作线性变换：

$$x' = \lambda^{\alpha_1}x, \quad t' = \lambda^{\alpha_2}t, \quad u' = \lambda^{\alpha_3}u \tag{7.2.18}$$

其中 λ 是变换参数，α_1，α_2 和 α_3 是常数.

(7.2.18)式代入方程(7.2.17)，得到

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) = \lambda^{2\alpha_1-\alpha_3}\left(\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\right) \tag{7.2.19}$$

因而要使 u' 关于 x'，t' 的方程与原方程一样，只有

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \tag{7.2.20}$$

所以有：

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 \tag{7.2.21}$$

特别的一种情况是(7.2.20)式的两端均为零，则有

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3 \tag{7.2.22}$$

由此可见，热传导方程(7.2.17)在变换

$$x' = \lambda^{\frac{1}{2}\alpha_3}x,\quad t' = \lambda^{\alpha_3}t,\quad u' = \lambda^{\alpha_3}u \tag{7.2.23}$$

下保持不变. 如取 $\alpha_3=1$，则 $\alpha_2=1$，$\alpha_1=1/2$，因而(7.2.23)式化为

$$x' = \lambda^{\frac{1}{2}}x,\quad t' = \lambda t,\quad u' = \lambda u \tag{7.2.24}$$

但要获得(7.2.16)形式的相似变换，还应要求

$$xt^m = x't'^m,\quad ut^n = u't'^n \tag{7.2.25}$$

这里 m 和 n 待定. (7.2.24)式代入(7.2.25)式得到

$$m = -\frac{1}{2},\quad n = -1 \tag{7.2.26}$$

由此可见：在不变变换中 $xt^{-1/2}$ 和 ut^{-1} 分别为常数. 所以，热传导方程(7.2.17)的一种相似变换为

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}},\quad v = \frac{u}{t} \tag{7.2.27}$$

相应的自相似解为

$$u = tv(\xi) = tv\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{7.2.28}$$

(7.2.28)式代入热传导方程(7.2.17)得到 $v(\xi)$ 满足的常微分方程是：

$$\nu\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} - v = 0 \tag{7.2.29}$$

这是不难求解的线性常微分方程.

例 2 非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{7.2.30}$$

以线性变换(7.2.18)式代入方程(7.2.30)，得到

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) + \lambda^{\alpha_1-2\alpha_3}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) = 0 \tag{7.2.31}$$

因而要使方程(7.2.31)与方程(7.2.30)一样，只有

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_3 \tag{7.2.32}$$

如取 $\alpha_3=0$,则 $\alpha_2=\alpha_1$,因而(7.2.18)式化为

$$x' = \lambda^{\alpha_1} x, \quad t' = \lambda^{\alpha_1} t, \quad u' = u \tag{7.2.33}$$

要获得(7.2.16)式的相似变换,必须满足(7.2.25)式,由此得到

$$m = -1, \quad n = 0 \tag{7.2.34}$$

因而,xt^{-1}和 ut^{n} 分别为常数.所以,非线性平流方程的一种相似变换为

$$\xi = x/t, \quad v = u \tag{7.2.35}$$

相应的自相似解为

$$u = v(\xi) = v\left(\frac{x}{t}\right) \tag{7.2.36}$$

(7.2.36)式代入非线性平流方程(7.2.30),得到 $v(\xi)$满足的常微分方程是

$$(-\xi + v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{7.2.37}$$

设$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\neq 0$,则由此求得

$$u = v = \xi = \frac{x}{t} \tag{7.2.38}$$

这是非线性平流方程(7.2.30)的一种相似解.

7.3 Burgers 方程

Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\nu > 0) \tag{7.3.1}$$

同样作(7.2.18)式的变换,则方程(7.3.1)化为

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) + \lambda^{\alpha_1-2\alpha_3}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right) = \lambda^{2\alpha_1-\alpha_3}\left(\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\right) \tag{7.3.2}$$

由此有

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \tag{7.3.3}$$

因而

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = -2\alpha_3 \tag{7.3.4}$$

这样，Burgers 方程的形式不变. 此时(7.2.18)式化为

$$x' = \lambda^{-\alpha_3}x, \quad t' = \lambda^{-2\alpha_3}t, \quad u' = \lambda^{\alpha_3}u \tag{7.3.5}$$

上式有时也称为 Burgers 方程(7.3.1)的标度(scaling)变换. 在 $\alpha_3 = 1$ 时，标度变换化为

$$x' = \lambda^{-1}x, \quad t' = \lambda^{-2}t, \quad u' = \lambda u \tag{7.3.6}$$

(7.3.5)式代入(7.2.23)式得到

$$m = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{1}{2} \tag{7.3.7}$$

由此可见：在标度变换下，$xt^{-1/2}$ 和 $ut^{1/2}$ 分别为常数. 所以，Burgers 方程(7.3.1)的相似变换为

$$\xi = t^{-1/2}x, \quad v = t^{1/2}u \tag{7.3.8}$$

它也可以视为在(7.3.6)式中取 $\lambda = t^{1/2}$(使 $t' = 1$)，x' 换为 ξ、u' 换为 v 得到的.

为了使 ξ 是无量纲的，我们常采用下列形式的相似变换：

$$\xi = (4\nu t)^{-1/2}x, \quad u = t^{-1/2}v(\xi) \tag{7.3.9}$$

容易验证：在上述相似变换下，与方程(7.2.8)和方程(7.2.10)相应的 X 和 U 为

$$X = \frac{x}{2t}, \quad U = -\frac{u}{2t} \tag{7.3.10}$$

以相似变换(7.3.9)代入 Burgers 方程(7.3.1)得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + 2\xi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + 2v - 4(4\nu)^{-1/2}v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{7.3.11}$$

若再作变换

$$w = (2\nu)^{1/2}v^{-1} \tag{7.3.12}$$

则方程(7.3.11)化为

$$w\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + 2\xi w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} - 2w^2 - 2^{3/2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{7.3.13}$$

方程(7.3.13)是下列具有 Painleve 性质的所谓 Euler-Painleve 方

程的一类方程

$$yy'' + ay'^2 + f(x)yy' + g(x)y^2 + by' + c = 0 \tag{7.3.14}$$

而且可以验证：方程(7.3.13)有一个解为

$$w_R = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{Re}{...}} - 1} e^{\xi^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi^2} \operatorname{erfc}\xi \tag{7.3.15}$$

其中 erfcξ 为余误差函数，而

$$Re = \int_0^\infty u \mathrm{d}x / 2\nu \tag{7.3.16}$$

为 Reynolds 数.

这样，我们求得 Burgers 方程的自相似解为

$$u = \sqrt{2\nu/t} \cdot w_R^{\ 1} \tag{7.3.17}$$

7.4 KdV 方程

KdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (\beta > 0) \tag{7.4.1}$$

与 Burgers 方程相似，对 KdV 方程(7.4.1)，若作变换(7.2.18)，则方程(7.4.1)化为

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) + \lambda^{\alpha_1-2\alpha_2}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) - \lambda^{3\alpha_1-\alpha_3}\left(\beta\frac{\partial^3 u'}{\partial x'^3}\right) = 0 \tag{7.4.2}$$

由此得到

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 = 3\alpha_1 - \alpha_3 \tag{7.4.3}$$

因而

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_3 \tag{7.4.4}$$

这样，KdV 方程的形式不变，此时，(7.2.18)式化为

$$x' = \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_3} x, \quad t' = \lambda^{-\frac{3}{2}\alpha_3} t, \quad u' = \lambda^{\alpha_3} u \tag{7.4.5}$$

这就是 KdV 方程的标度变换. 在 $\alpha_3 = 1$ 时, 它化为

$$x' = \lambda^{-1/2} x, \quad t' = \lambda^{-3/2} t, \quad u' = \lambda u \tag{7.4.6}$$

(7.4.5)式代入(7.2.25)式得到

$$m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{1}{3}, \quad n = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{2}{3} \tag{7.4.7}$$

由此可见: 在标度变换下, $xt^{-1/3}$ 和 $ut^{2/3}$ 分别为常数. 所以, KdV 方程(7.4.1)的相似变换为

$$\xi = t^{-1/3} x, \quad v = t^{2/3} u \tag{7.4.8}$$

它也可以视为在(7.4.6)式中取 $\lambda = t^{2/3}$(使 $t' = 1$), x' 换为 ξ, u' 换为 v 得到的.

为了使 ξ 是无量纲的, 我们常采用下列形式的相似变换:

$$\xi = (3\beta t)^{-1/3} x, \quad u = 2(3\beta)^{1/3} t^{-2/3} v(\xi) \tag{7.4.9}$$

容易验证: 在上述相似变换下, 与方程(7.2.8)和方程(7.2.10)相应的 X 和 U 为

$$X = \frac{x}{3t}, \quad U = -\frac{2u}{3t} \tag{7.4.10}$$

以相似变换(7.4.9)式代入 KdV 方程(7.4.1)得到

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} + 6v\frac{dv}{d\xi} - 2v - \xi\frac{dv}{d\xi} = 0 \tag{7.4.11}$$

这是一个可化为 Painleve 的 P_{II} 型方程的方程.

首先, 我们看到, 在方程(7.4.11)中若忽略非线性项, 则它化为下列线性方程

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} - \xi\frac{dv}{d\xi} - 2v = 0 \tag{7.4.12}$$

而且它有一个特解为

$$v = a\frac{dA_i}{d\xi} \tag{7.4.13}$$

其中 a 为任意常数, 而 $A_i(\xi)$ 是 Airy 函数, 它满足 Airy 方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_i}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi A_i = 0 \tag{7.4.14}$$

这样,KdV 方程(7.4.1)的自相似解为

$$u = 2(3\beta)^{1/3} t^{-2/3} a A_i(\xi) \tag{7.4.15}$$

实际上,线性 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{7.4.16}$$

就存在一个包含 Airy 函数的特解(见习题 6.5)为

$$u = (3\beta t)^{-1/3} A_i((3\beta t)^{-1/3}(x - c_0 t)) \tag{7.4.17}$$

其次,我们直接考虑非线性方程(7.4.11),作变换

$$v = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} - w^2 \tag{7.4.18}$$

则方程(7.4.11)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w - 2w^3\right) - 2w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w - 2w^3\right) = 0 \tag{7.4.19}$$

方程(7.4.19)对 ξ 积分一次,求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w - 2w^3\right) = C e^{2\int_\xi^\infty w(\eta)\mathrm{d}\eta} \tag{7.4.20}$$

其中 C 为积分常数. 若我们要求 $\xi \to \infty$ 时,w 呈指数衰减,则选 $C = 0$,且再对 ξ 积分一次,则方程(7.4.20)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w - 2w^3 = 0 \tag{7.4.21}$$

这就是 Painleve 的 P_{II} 型方程. 我们在第 2 章已求得 $\xi \to \infty$ 时 P_{II} 型方程的渐近解. 这里,考虑随 ξ 的增大,w 急剧减小,从而使我们可以忽略方程(7.4.21)中的非线性项,而使它化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w = 0 \tag{7.4.22}$$

这是由(7.4.14)式表征的 Airy 方程,则

$$w = a A_i(\xi) \tag{7.4.23}$$

因而

$$v = a\frac{\mathrm{d}A_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi} - a^2A_i^2(\xi) \qquad (7.4.24)$$

所以，KdV 方程(7.4.1)的自相似解为

$$u = 2(3\beta)^{1/3}t^{-2/3}\left[a\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}\xi} - a^2A_i^2(\xi)\right] \qquad (7.4.25)$$

7.5 mKdV 方程

mKdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (7.5.1)$$

若作变换(7.2.18)，则方程(7.5.1)化为

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) + \lambda^{\alpha_1-3\alpha_3}\left(\alpha u'^2\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) + \lambda^{3\alpha_1-\alpha_3}\left(\beta\frac{\partial^3 u'}{\partial x'^3}\right) = 0$$
$$(7.5.2)$$

由此得到

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 3\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_3 \qquad (7.5.3)$$

因而

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = -3\alpha_3 \qquad (7.5.4)$$

这样，mKdV 方程的形式不变，此时，(7.2.18)式化为

$$x' = \lambda^{-\alpha_3}x, \quad t' = \lambda^{-3\alpha_3}t, \quad u' = \lambda^{\alpha_3}u \qquad (7.5.5)$$

这就是 mKdV 方程的标度变换. 在 $\alpha_3=1$ 时，它化为

$$x' = \lambda^{-1}x, \quad t' = \lambda^{-3}t, \quad u' = \lambda u \qquad (7.5.6)$$

(7.5.5)式代入(7.2.25)式得到

$$m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{1}{3}, \quad n = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{1}{3} \qquad (7.5.7)$$

由此可见：在标度变换下，$xt^{-1/3}$和 $ut^{1/3}$分别为常数. 所以，mKdV 方程(7.5.1)的相似变换为

$$\xi = t^{-1/3}x, \quad v = t^{1/3}u \qquad (7.5.8)$$

它也可以视为在(7.5.6)式中取 $\lambda=t^{-1/3}$(使 $t'=1$)，x'换为 ξ，u'换

为 v 得到的.

为了使 ξ 无量纲化，在 $\beta>0$ 和 $\alpha<0$ 时，将(7.5.8)式改写为

$$\xi = (3\beta t)^{-1/3}x, \quad u = \sqrt{-\frac{6}{\alpha}}\beta^{1/6}(3t)^{-1/3}v(\xi) \tag{7.5.9}$$

与(7.6.9)式相应，不难验证

$$X = \frac{x}{3t}, \quad U = -\frac{u}{3t} \tag{7.5.10}$$

以相似变换(7.5.9)式代入 mKdV 方程(7.5.1)得到

$$\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}\xi^3} - 6v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\xi v) = 0 \tag{7.5.11}$$

方程(7.5.11)对 ξ 积分一次有

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} = 2v^3 + \xi v + \alpha \tag{7.5.12}$$

其中 α 为积分常数，方程(7.5.12)是 Painleve 方程 P_{I}，我们在第 2 章和上一节都讨论过它的渐近解. 在 $\alpha=0$ 时，方程(7.5.12)的渐近解为

$$v = aA_i(\xi) \tag{7.5.13}$$

所以，mKdV 方程(7.5.1)的自相似解可以写为

$$u = \sqrt{-\frac{6}{\alpha}}\beta^{1/6}(3t)^{-1/3}aA_i(\xi) \tag{7.5.14}$$

7.6 正弦-Gordon 方程

正弦-Gordon 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2\sin u = 0 \tag{7.6.1}$$

但先作变换

$$\xi = \frac{\lambda_0}{2}(x - c_0 t), \quad \eta = \frac{\lambda_0}{2}(x + c_0 t), \quad (\lambda_0 = f_0/c_0) \tag{7.6.3}$$

使正弦-Gordon 方程(7.6.1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \sin u \tag{7.6.4}$$

那么,(7.2.18)式类型的变换就能实现了.

方程(7.6.4)也称为正弦-Gordon 方程.对它可作变换

$$\xi' = \lambda^{\alpha_1}\xi, \quad \eta' = \lambda^{\alpha_2}\eta, \quad u' = \lambda^{\alpha_3}u \tag{7.6.5}$$

则方程(7.6.4)化为

$$\lambda^{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi' \partial \eta'}\right) = \sin(\lambda^{-\alpha_3}u') \tag{7.6.6}$$

由此得到

$$\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{7.6.7}$$

类似于(7.2.25)式,这里的相似变换还要求

$$\xi\eta^m = \xi'\eta'^m, \quad u\eta^n = u'\eta'^n \tag{7.6.8}$$

(7.6.5)式代入(7.6.8)式,得到

$$m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1, \quad n = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0 \tag{7.6.9}$$

由此可见:在方程(7.6.4)的不变变换中 $\xi\eta$ 和 u 分别为常数.所以,正弦-Gordon 方程(7.6.4)的相似变换为

$$\zeta = \xi\eta, \quad v = u \tag{7.6.10}$$

(7.6.10)式代入正弦-Gordon 方程(7.6.4),得到

$$\zeta\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta} = \sin u = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}) \tag{7.6.11}$$

若再令

$$w(\zeta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} \tag{7.6.12}$$

则方程(7.6.11)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\zeta^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 - \frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{1}{2\zeta}(w^2 - 1) \tag{7.6.13}$$

这是 Painleve 方程 P_{III}. 我们在第 2 章在一定条件下讨论过它的解. 可以肯定方程(7.6.13)具有 Painleve 性质.

这里还要强调的是：正是由于像 KdV 方程一类的方程存在相似变换，且变换后的常微分方程具有 Painleve 性质，我们才能知道这类方程是可积的.

7.7 浅水方程组

在(1.2.25)式中标记过的一维浅水方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{7.7.1}$$

对它作变换

$$x' = \lambda^{\alpha_1} x, \quad t' = \lambda^{\alpha_2} t, \quad u' = \lambda^{\alpha_3} u, \quad h' = \lambda^{\alpha_4} h \tag{7.7.2}$$

则方程组(7.7.1)化为

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha_2 - \alpha_3}\dfrac{\partial u'}{\partial t'} + \lambda^{\alpha_1 - 2\alpha_3}\left(u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'}\right) + \lambda^{\alpha_1 - \alpha_4}\left(g\dfrac{\partial h'}{\partial x'}\right) = 0 \\ \lambda^{\alpha_2 - \alpha_4}\dfrac{\partial h'}{\partial t'} + \lambda^{\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4}\left(u'\dfrac{\partial h'}{\partial x'} + h'\dfrac{\partial u'}{\partial x'}\right) = 0 \end{cases} \tag{7.7.3}$$

由此有

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_4, \quad \alpha_2 - \alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 \tag{7.7.4}$$

因而

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3, \quad 2\alpha_3 = \alpha_4 \tag{7.7.5}$$

如取 $\alpha_3 = 0$，则

$$\alpha_4 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \tag{7.7.6}$$

这样，(7.7.2)式化为

$$x' = \lambda^{\alpha_1} x, \quad t' = \lambda^{\alpha_1} t, \quad u' = u, \quad h' = h \tag{7.7.7}$$

对于方程组(7.7.1),相似变换要求

$$xt^m = x' t'^m, \quad ut^n = u' t'^n, \quad ht^n = h' t'^n \tag{7.7.8}$$

(7.7.7)式代入(7.7.8)式,得到

$$m = -1, \quad n = 0 \tag{7.7.9}$$

由此可见,在方程组(7.7.1)的不变变换中 xt^{-1} 和 u,h 分别为常数. 所以,一维浅水方程组的相似变换为

$$\xi = x/t, \quad u' = u, \quad h' = h \tag{7.7.10}$$

(7.7.10)式代入方程组(7.7.1),得到

$$\begin{cases} (u - \xi) \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + g \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = 0 \\ h \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + (u - \xi) \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = 0 \end{cases} \tag{7.7.11}$$

这是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}$ 的齐次方程组,要求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}$ 有非零解,只有

$$\begin{vmatrix} u - \xi & g \\ h & u - \xi \end{vmatrix} = 0 \tag{7.7.12}$$

因而

$$(u - \xi)^2 - c^2 = 0 \quad (c = \sqrt{gh}) \tag{7.7.13}$$

或

$$u - \xi = \pm c \quad (c = \sqrt{gh}) \tag{7.7.14}$$

对于 $u - \xi = c$,有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} \quad (u - \xi = \sqrt{gh}) \tag{7.7.15}$$

同时,(7.7.11)式化为

$$\sqrt{h} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \sqrt{g} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = 0 \quad (u - \xi = \sqrt{gh}) \tag{7.7.16}$$

(7.7.15)式和(7.7.16)式联立消去 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,得到

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + \frac{2}{3\sqrt{g}}\sqrt{h} = 0 \tag{7.7.17}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}\xi} + \frac{2}{3}c = 0 \quad \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{3} = 0\right) \tag{7.7.18}$$

由此求得

$$c \equiv \sqrt{gh} = -\frac{1}{3}\xi + A \tag{7.7.19}$$

其中 A 为积分常数. 考虑 $u=0$ 时 $c=c_0=\sqrt{gH}$(H 为静止时的自由面高度),相应 $\xi=\xi_0$,因而 $u-\xi=c$ 化为条件

$$\xi = \xi_0 = -c_0, \quad c = c_0 \tag{7.7.20}$$

(7.7.20)式代入(7.7.19)式,定得 $A=\dfrac{2}{3}c_0$,由此求得

$$c \equiv \sqrt{gh} = -\frac{1}{3}(\xi - 2c_0) \tag{7.7.21}$$

或

$$\sqrt{h} = -\frac{1}{3\sqrt{g}}(\xi - 2c_0) \quad (\xi < 2c_0) \tag{7.7.22}$$

因而

$$u = \xi + c = \frac{2}{3}(\xi + c_0) \quad (\xi < 2c_0) \tag{7.7.23}$$

对于 $u-\xi=-c$,有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} \quad (u - \xi = -\sqrt{gh}) \tag{7.7.24}$$

同时,(7.7.11)式化为

$$-\sqrt{h}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \sqrt{g}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = 0 \quad (u - \xi = -\sqrt{gh}) \tag{7.7.25}$$

(7.7.24)式和(7.7.25)式联立消去$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,得到

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} - \frac{2}{3\sqrt{g}}\sqrt{h} = 0 \tag{7.7.26}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}\xi} - \frac{2}{3}c = 0 \quad \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\xi} - \frac{1}{3} = 0\right) \tag{7.7.27}$$

由此求得

$$c \equiv \sqrt{gh} = \frac{1}{3}\xi + B \tag{7.7.28}$$

其中 B 为积分常数. 而 $u-\xi=-c$ 化为条件

$$\xi = \xi_0 = c_0, \quad c = c_0 \tag{7.7.29}$$

(7.7.29)式代入(7.7.28)式，定得 $B=\frac{2}{3}c_0$，由此求得

$$c \equiv \sqrt{gh} = \frac{1}{3}(\xi + 2c_0) \tag{7.7.30}$$

或

$$\sqrt{h} = \frac{1}{3\sqrt{g}}(\xi + 2c_0) \quad (-\xi < 2c_0) \tag{7.7.31}$$

因而

$$u = \xi - c = \frac{2}{3}(\xi - c_0) \quad (-\xi < 2c_0) \tag{7.7.32}$$

综上所述，浅水方程组(7.7.1)的自相似解为

$$u = \begin{cases} \frac{2}{3}(\xi + c_0) & (\xi < 2c_0) \\ & (\xi = x/t) \\ \frac{2}{3}(\xi - c_0) & (-\xi < 2c_0) \end{cases} \tag{7.7.33}$$

和

$$h = \begin{cases} \frac{1}{9g}(\xi - 2c_0)^2 & (\xi < 2c_0) \\ & (\xi = x/t) \\ \frac{1}{9g}(\xi + 2c_0)^2 & (-\xi < 2c_0) \end{cases} \tag{7.7.34}$$

习　题　7

7.1　说明下列方程在一定初条件下存在活动奇点

(1) $y'=1-xy^2$

(2) $y'=\dfrac{y^2}{1-xy}$　（提示：$y=e^{xy}$）

(3) $2y'y'''=3y''^2$

7.2　证明在下列变换下，方程的形式保持不变

(1) Burgers 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$$x'=\lambda^{-\alpha}x,\quad t'=\lambda^{-2\alpha}t,\quad u'=\lambda^{\alpha}u$$

(2) KdV 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

$$x'=\lambda^{-\frac{\alpha}{2}}x,\quad t'=\lambda^{-\frac{3\alpha}{2}}t,\quad u'=\lambda^{\alpha}u$$

(3) mKdV 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

$$x'=\lambda^{-\alpha}x,\quad t'=\lambda^{-3\alpha}t,\quad u'=\lambda^{\alpha}u$$

(4) NLS 方程 $\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0$

$$x'=\lambda^{-\alpha_1}x,\quad t'=\lambda^{-2\alpha_1}t,\quad u'=\lambda^{\alpha_1}u$$

7.3　说明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}\pm 6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

有自相似解

$$u=\pm(3t)^{-2/3}f(\xi),\quad \xi=(3t)^{-1/3}x$$

7.4　利用相似变换化非线性热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

为非线性常微分方程求解.

7.5　证明柱 KdV 方程

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{t} - 3u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

有形式为

$$u = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^2}\right)^{1/3} v(\xi), \quad \xi = (2t)^{-1/3} x$$

的自相似解. 并且证明：如 $x\to\infty$ 时，v 充分快地趋于零，则 $w=v^2$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi w + w^3 = 0$$

7.6 设方程有自相似解

$$u = t^n v(\xi), \quad \xi = x t^m$$

试确定 m,n 及 $v(\xi)$ 所满足的方程

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^3$

(2) $\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2 u = 0$

*7.7 求 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的下列形式自相似解

$$u = t^n v(\xi), \quad \xi = x t^p - \lambda y^2 t^q$$

若设在 $\xi=\xi_0$ 处，$v, \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}, \cdots \to 0$，证明 $w=\sqrt{v}$ 满足 KP 方程.

第 8 章　特殊变换法

特殊变换法是求解非线性方程，特别是非线性偏微分方程的一种重要的方法. 它根据某些非线性方程的基本的特征，通过自变量变换、因变量变换或自变量和因变量的混合变换获得某些非线性偏微分方程的解，甚至还能获得所谓包含任意函数的通解.

8.1　特征线方法

描写线性波或非线性波的偏微分方程有什么特征呢？我们举例来说明.

例 1　一维线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad(c_0>0,\text{常数})\tag{8.1.1}$$

若作自变量变换

$$\xi=x-c_0t,\quad \eta=x+c_0t\tag{8.1.2}$$

则因

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c_0\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\tag{8.1.3}$$

方程(8.1.1)化为

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\tag{8.1.4}$$

它表明 u 与 η 无关，只与 ξ 有关. 它的通解为

$$u=f(\xi)=f(x-c_0t)\tag{8.1.5}$$

其中 f 是 ξ 的任意函数.

(8.1.5)式表示一个以常速度 c_0 沿 x 正方向传播的行波，$\xi\equiv$

$x-c_0t$ 即是它的相位；同时，$u(x,t)$乃是初始扰动 $u|_{t=0}=u_0(x)$形状地向 x 方向移动一段距离 c_0t 后形成的. 因此，若令

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_0 \tag{8.1.6}$$

则一维线性平流方程(8.1.1)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.1.7}$$

所以，线性平流方程(8.1.1)的物理意义是：第一，它表征 u 的初始扰动不变形地以速度 c_0 向 x 正方向传播；第二，它表征在非均匀的 u 场中，以速度 c_0 运行的质点，在运行过程中保持自身的 u 不变，这就是通常所说的波粒二象性(wave-particle duality).

我们称(8.1.6)式为方程(8.1.1)的特征方程，其中$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$称为特征方向，特征方程(8.1.6)的解

$$\xi\equiv x-c_0t=\text{常数} \tag{8.1.8}$$

称为方程(8.1.1)的特征线，在特征线上 u 保持不变，u 就称为方程(8.1.1)的 Riemann 不变量(Riemann invariant). 有了特征线和 Riemann 不变量的概念，我们可以把偏微分方程(8.1.1)的研究转化为两个常微分方程(8.1.6)和(8.1.7)的研究，而且后两者可以合写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{c_0}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{0} \tag{8.1.9}$$

这就是形为(7.2.7)式的方程.

由此可见，对波动方程，沿特征方向

$$\lambda\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{8.1.10}$$

的 Riemann 不变量 r 满足方程

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \lambda \frac{\partial r}{\partial x} = 0^{①} \tag{8.1.11}$$

例 2 一维线性波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (c_0 > 0, \text{常数}) \tag{8.1.12}$$

与例 1 相同,若作(8.1.2)式的自变量变换,则方程(8.1.12)化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{8.1.13}$$

所以,方程(8.1.12)的通解为

$$\psi = f(\xi) + g(\eta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \tag{8.1.14}$$

其中 f 和 g 分别是 ξ 和 η 的任意函数.(8.1.14)式表明:解 ψ 是以速度 c_0 沿 x 正方向传播的右行波 $f(\xi)$ 和以速度 c_0 沿 x 反方向传播的左行波 $g(\eta)$ 的迭加.

显然,方程(8.1.12)有两组特征线

$$\xi \equiv x - c_0 t = \text{常数}, \quad \eta \equiv x + c_0 t = \text{常数} \tag{8.1.15}$$

它们分别满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c_0 \tag{8.1.16}$$

对于方程(8.1.12),我们如何把它化为(8.1.11)式的标准形式并获得特征线和 Riemann 不变量呢? 如果我们令

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad v = c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.1.17}$$

则方程(8.1.12)可以化为下列 u 和 v 的对称方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{8.1.18}$$

---

① 在数学上,比(8.1.11)式更一般的 Riemann 不变量 r 满足 $\frac{\partial r}{\partial t} + \lambda \frac{\partial r}{\partial x} = f$.

为了使它化为(8.1.11)式的标准形式,我们用 α 和 β 分别去乘方程组(8.1.18)的第一式和第二式,然后相加,得到

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta c_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\beta\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha c_0\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \quad (8.1.19)$$

这里 α 和 β 一般是 x,t,u,v 的函数,也可以是常数.我们选择 α 和 β 使它化为形式

$$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \quad (8.1.20)$$

其中 $\lambda\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,这样,(8.1.20)式形式上就等同于(8.1.11)式了,特别当 α 和 β 为常数时,看得尤为清楚.

比较方程(8.1.20)和(8.1.19),我们有

$$\begin{cases}\lambda\alpha+c_0\beta=0\\ c_0\alpha+\lambda\beta=0\end{cases} \quad (8.1.21)$$

这是关于 α 和 β 的齐次代数方程组.要使 α,β 有非零解.必要而且只有 α,β 的系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix}\lambda & c_0\\ c_0 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad (8.1.22)$$

由此求得

$$\lambda=\pm c_0 \quad (8.1.23)$$

对于 $\lambda=c_0$,由(8.1.21)式求得 $\beta=-\alpha$,则(8.1.20)式化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)(u-v)=0 \quad (8.1.24)$$

对于 $\lambda=-c_0$,由(8.1.21)式求得 $\beta=\alpha$,则(8.1.20)式化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)(u+v)=0 \quad (8.1.25)$$

所以,一维线性波动方程(8.1.12)有两个 Riemann 不变量:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_0, \quad r_1=u-v=\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-c_0\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-c_0, \quad r_2=u+v=\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases} \quad (8.1.26)$$

事实上，对于对称方程组(8.1.18)，若令

$$w=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & -c_0\\ -c_0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.1.27}$$

则它可以改写为

$$\frac{\partial w}{\partial t}+A\frac{\partial w}{\partial x}=0^{①} \tag{8.1.28}$$

矩阵 A 的特征方程即是(8.1.22)式，而特征值即是(8.1.23)式.

如果方程(8.1.28)中的 A 可以是 x,t 和 w 的函数，但与 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 无关，则方程(8.1.28)关于 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 是线性的，但关于 w 是非线性的，这样的方程称为是拟线性方程(quasi-linear equation). 由矩阵 A 的特征方程可以确定特征方向或特征值，用类似于获得(8.1.24)式和(8.1.25)式的过程去确定 Riemann 不变量. 下面举四例说明.

例 1 一维非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{8.1.29}$$

这是最简单的一个拟线性方程.

显然，方程(8.1.29)的特征线满足

$$\lambda\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,t) \tag{8.1.30}$$

与(8.1.6)式比较即知：这里 λ 不是常数. (8.1.30)式代入方程(8.1.29)，得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.1.31}$$

它表示沿特征方向 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,t)$ 的任一条特征线($x-ut=$常数)，u

---

① 在数学上，比(8.1.28)式更一般的方程写为 $\frac{\partial w}{\partial t}+A\frac{\partial w}{\partial x}+B=0$，但特征值与 B 无关.

是不变的，即它是 Riemann 不变量.

类似于(8.1.2)式，我们若令

$$\xi = x - u(x,t)t, \quad \eta = x + u(x,t)t \tag{8.1.32}$$

因

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}{1 - t\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}}{1 - t\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)} \tag{8.1.33}$$

则一维非线性平流方程(8.1.29)化为下列简单的一阶线性偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{8.1.34}$$

所以，通解为

$$u = f(\xi) = f(x - ut) \tag{8.1.35}$$

其中 f 是任意函数.

如果给方程(8.1.29)以初条件：

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{8.1.36}$$

则 $f(x)=u_0(x)$，因而(8.1.35)式改写为

$$u = u_0(x - ut) \tag{8.1.37}$$

它表示初始扰动 $u_0(x)$ 以速度 u 向 x 方向传播. 但因为 u 是变量，因此，在初始扰动 $u_0(x)$ 上每一点经一定时刻移动的距离是不同的，因而随着波的传播，初始扰动将发生变形；到足够长的时间以后，同一个 x 会出现多个 u 值，即 u 成为多值函数，从而出现不连续，使初始扰动破坏，见图 8.1(图中 $t_3>t_2>t_1>0$).

所以，在这样的情况下，不论初始 $u_0(x)$ 如何光滑，非线性平流方程(8.1.29)初值问题的连续光滑解，只能在局部范围中存在，而在某些点上，特别是 t 充分大时，解是不连续的，这种解称为弱解或广义解，它允许解存在不连续地跳跃，在流体力学中称为激波；相反，非线性方程初值问题的连续光滑解称为强解.

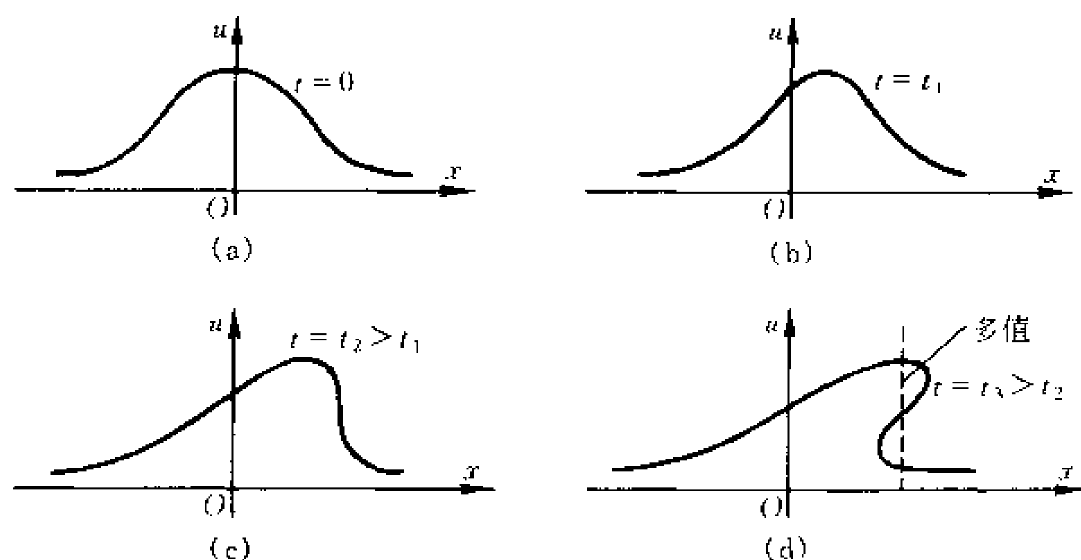


图 8-1

最后还要说明的是：线性方程所存在的解的叠加原理对于非线性方程是不成立的.

非线性平流方程初值问题除出现激波现象外，还会出现别的现象. 例如，我们令

$$u = X(x)T(t) \tag{8.1.38}$$

代入非线性平流方程(8.1.29)得到

$$\frac{1}{T^2}T' = -X' = -\lambda_0(\text{常数}) \tag{8.1.39}$$

由此求得

$$T = \frac{T(0)}{1+\lambda_0 T(0)t} \tag{8.1.40}$$

注意 $u|_{t=0} = u_0(x) = T(0)X(x)$，(8.1.40)式代入(8.1.39)式求得

$$u = \frac{u_0(x)}{1+\lambda_0 T(0)t} = \frac{u_0(x)}{1-t/t_c} \tag{8.1.41}$$

其中

$$t_c = -\frac{1}{\lambda_0 T(0)} \tag{8.1.42}$$

由此可见，只要 $t_c>0$，则当 $t=t_c$ 时，$u\to\infty$，它称为破裂或崩溃(blow-up). 而且，当 $t<t_c$ 时，在任一点上 u 与 u_0 同号；但当 $t>t_c$ 时，u 与 u_0 反号，从而出现了反向转变.

将方程(8.1.29)扩展，对于非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{8.1.43}$$

满足初条件(8.1.36)的解显然为

$$u=u_0(x-c(u)t) \tag{8.1.44}$$

例 2 一维不可压缩流体的运动方程，连续性方程和绝热方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial \rho u}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \theta}{\partial t}+u\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=0\end{cases} \tag{8.1.45}$$

其中 u，ρ 和 θ 分别为速度、密度和位温. 设它们的初条件是

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\quad \theta|_{t=0}=\theta_0(x) \tag{8.1.46}$$

显然，方程组(8.1.45)的第一个方程可以独立地求解，且依(8.1.37)式，它满足初条件的解为

$$u=u_0(\xi),\quad \xi=x-ut \tag{8.1.47}$$

又依(8.1.33)式有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_0'(\xi)}{1+tu_0'(\xi)} \tag{8.1.48}$$

据此，设 ρ 和 θ 的解分别为

$$\rho=\frac{\alpha(\xi)}{1+tu_0'(\xi)},\quad \theta=\frac{\beta(\xi)}{1+tu_0'(\xi)} \tag{8.1.49}$$

其中 $\alpha(\xi)$ 和 $\beta(\xi)$ 不难由初条件分别定为 $\rho_0(\xi)$ 和 $\theta_0(\xi)$，所以 ρ 和 θ 的解应为

$$\rho = \frac{\rho_0(\xi)}{1 + tu_0'(\xi)}, \quad \theta = \frac{\theta_0(\xi)}{1 + tu_0'(\xi)} \tag{8.1.50}$$

例 3 一维浅水方程组(见(1.2.25)式)可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{8.1.51}$$

其中 u 和 h 分别为速度和自由面高度，g 为重力加速度.

以 α 和 β 分别去乘方程组(8.1.51)的第一式和第二式，然后相加，得到

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha u + \beta h)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[\beta\frac{\partial h}{\partial t} + (g\alpha + \beta u)\frac{\partial h}{\partial x}\right] = 0 \tag{8.1.52}$$

我们选择 α 和 β 使(8.1.52)式化为

$$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \tag{8.1.53}$$

比较方程(8.1.53)和(8.1.52)，我们有

$$\begin{cases} (u - \lambda)\alpha + h\beta = 0 \\ g\alpha + (u - \lambda)\beta = 0 \end{cases} \tag{8.1.54}$$

由此有

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & h \\ g & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8.1.55}$$

这就是方程组(8.1.51)的特征方程，而特征值为

$$\lambda \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c \quad (c = \sqrt{gh}) \tag{8.1.56}$$

对于 $\lambda=u+c$，求得 $\beta=\frac{c}{h}\alpha=\sqrt{\frac{g}{h}}\alpha$；对于 $\lambda=u-c$，求得 $\beta=-\frac{c}{h}\alpha=-\sqrt{\frac{g}{h}}\alpha$. 将 λ,α 和 β 一并代入方程(8.1.53)，分别得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r_1}{\partial t} + (u + c)\dfrac{\partial r_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial t} + (u - c)\dfrac{\partial r_2}{\partial x} = 0\end{cases} \tag{8.1.57}$$

其中

$$r_1 = u + 2c, \quad r_2 = u - 2c \quad (c = \sqrt{gh}) \tag{8.1.58}$$

分别为沿特征方向$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c$和$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c$的 Riemann 不变量.

对浅水波而言,初始是静止的,深度为H,即

$$u|_{t=0} = 0, \quad h|_{t=0} = H = \text{常数} \tag{8.1.59}$$

在图 8-2 的(x,t)平面上,x轴上$(t=0)$为$u=0$和$c=c_0\equiv\sqrt{gH}$.

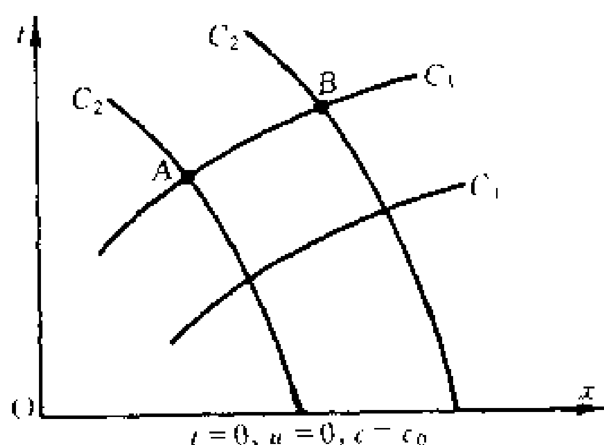


图 8-2

对于图 8-2 中的特征线C_1:$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c$,它表征向右传播的浅水波,由(8.1.57)式知,在C_1上

$$u + 2c = \text{常数} \tag{8.1.60}$$

则对C_1上的任意两点A和B有

$$u_A + 2c_A = u_B + 2c_B \tag{8.1.61}$$

但通过A和B各有一条特征线C_2:$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c$,它表征向左传播的浅水波. 因$C_2$线必然从$x$轴出发,由(8.1.57)式知,在$C_2$上

$$u - 2c = 常数 = -2c_0 \tag{8.1.62}$$

因而有

$$u_A - 2c_A = -2c_0 = u_B - 2c_B \tag{8.1.63}$$

(8.1.61)式和(8.1.63)式联立有

$$u_A = u_B, \quad c_A = c_B \tag{8.1.64}$$

它表示,在向右传播的浅水波的特征线 C_1 上,u 和 c 均保持不变,而且由(8.1.63)式知 u 与 c 之间的关系为

$$u = 2(c - c_0) \tag{8.1.65}$$

这是向右移动的浅水波中流体的速度.(8.1.65)式代入方程组(8.1.51)的第二式,得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (3c - 2c_0)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{8.1.66}$$

其形式同方程(8.1.43).由此求得

$$h = h(\xi), \quad \xi = x - (3c - 2c_0)t \tag{8.1.67}$$

这是向右传播的浅水波自由面高度的隐式解.

例 4 含阻尼的非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + au = 0 \tag{8.1.68}$$

它是非线性平流方程(8.1.29)加上阻尼项 au 得到的.应用(8.1.30)式,即令 $u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,则方程(8.1.68)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + au = 0 \tag{8.1.69}$$

设初条件仍为(8.1.36)式,则方程(8.1.69)满足初条件(8.1.36)的解可以写为

$$u = \mathrm{e}^{-at}u_0(\xi) \tag{8.1.70}$$

其中

$$\xi = x - uF(t), \quad F(0) = 0 \tag{8.1.71}$$

(8.1.70)式代入方程(8.1.69)得到

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - aF = 1 \tag{8.1.72}$$

利用 $F(0)=0$ 求得

$$F(t) = \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{at} - 1) \tag{8.1.73}$$

8.2 因变量或自变量变换

本节讨论一般的二阶非线性偏微分方程

$$P\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{8.2.1}$$

其中 x 和 y 为自变量，u 为因变量.

(8.2.1)式类型的一些方程可以通过因变量或自变量变换求得通解，也可以作些假定求得特解. 下面举几例说明.

例 1 非线性 Laplace 方程

$$\nabla_2 \cdot (k(u)\ \nabla_2 u) = 0 \tag{8.2.2}$$

其中 ∇_2 为关于 x 和 y 的二维 Hamilton 算子.

我们可以作因变量变换，令

$$v = F(u) \tag{8.2.3}$$

使 v 满足线性 Laplace 方程：

$$\nabla_2^2 v = 0 \tag{8.2.4}$$

因为

$$\nabla_2 v = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\ \nabla_2 u \tag{8.2.5}$$

则代入方程(8.2.4)得到

$$\nabla_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\ \nabla_2 u\right) = 0 \tag{8.2.6}$$

方程(8.2.6)与方程(8.2.2)比较得

$$k(u) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} \tag{8.2.7}$$

因而

$$v = F(u) = \int_{u_0}^{u} k(u)\mathrm{d}u \qquad (8.2.8)$$

其中 u_0 是一任意参照常数. 这样, 关于 u 的非线性 Laplace 方程(8.2.2)的求解就化成了关于 v 的线性 Laplace 方程(8.2.4)的求解.

比如 $k(u)=u^{\alpha}(\alpha\neq-1)$, 而且求解下列第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla_2 \cdot (u^{\alpha} \ \nabla_2 u) = 0 \\ u|_{\Sigma} = f \end{cases} \qquad (8.2.9)$$

则先由(8.2.8)式求得

$$v = \frac{1}{\alpha+1}(u^{\alpha+1} - u_0^{\alpha+1}) \qquad (8.2.10)$$

然后再求解

$$\begin{cases} \nabla_2^2 v = 0 \\ v|_{\Sigma} = \dfrac{1}{\alpha+1}(f^{\alpha+1} - u_0^{\alpha+1}) \end{cases} \qquad (8.2.11)$$

由此解出 v 后代回(8.2.10)式即可确定 u.

例 2 Monge-Ampere 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0 \qquad (8.2.12)$$

这是普遍的 Monge-Ampere 方程(1.2.2)中的最简单的情况. 若令

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w \qquad (8.2.13)$$

因为$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial x}$, 则方程(8.2.12)化为

$$J(v,w) \equiv \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (8.2.14)$$

上式成立只有

$$v = F(w) \qquad (8.2.15)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (8.2.16)$$

这样，Monge-Ampere 方程(8.2.12)就化成了方程(8.2.16)，而方程(8.2.16)通常是比较容易求解的.

例 3 非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{8.2.17}$$

若作变换

$$u=F(\eta),\quad \eta=y+G(x) \tag{8.2.18}$$

其中 F 和 G 是任意函数.

(8.2.18)式代入方程(8.2.17)得到一个恒等式

$$F'(\eta)F''(\eta)G'(x)-F'(\eta)G'(x)F''(\eta)\equiv 0 \tag{8.2.19}$$

这就表明：非线性方程(8.2.17)的通解为(8.2.18)式.

例 4 不可压缩流体的边界层方程为

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{8.2.20}$$

其中 u 和 v 分别是 x 和 y 方向上的速度，ν 为粘性系数.

由方程组(8.2.20)的第二式(连续性方程)可以引进流函数 ψ：

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.2.21}$$

这样，(8.2.20)的第一式(运动方程)化为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{8.2.22}$$

它的左端与方程(8.2.17)的左端形式相同. 这样，我们可以选(8.2.18)式类型的解作为方程(8.2.22)的解，即

$$\psi=F(\eta),\quad \eta=y+G(x) \tag{8.2.23}$$

但要求$\dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=0$，即可以选择

$$F(\eta)=a\eta^2+b\eta+c \tag{8.2.24}$$

其中 a,b 和 c 为常数.

例 5 非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.25}$$

这是方程(8.2.17)中的 x 与 y 对换形成的. 所以,方程(8.2.25)的通解可以写为

$$u = F(\xi), \quad \xi = x + G(y) \tag{8.2.26}$$

例 6 非线性方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{8.2.27}$$

显然,它有通解

$$u = F(x)G(y) \tag{8.2.28}$$

例 7 Liouville 方程

在(1.2.1)式中已经标记过的 Liouville 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^u \tag{8.2.29}$$

它可以视为是非线性常微分方程(2.5.24)的扩展. 类似,我们作变换

$$u = \ln w^{-2} \tag{8.2.30}$$

代入方程(8.2.29)使它化为

$$w\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2} \tag{8.2.31}$$

将(8.2.31)式的两边对 x 微商得到

$$w\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{8.2.32}$$

因而有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = r(x)w \tag{8.2.33}$$

其中 $r(x)$ 是 x 的任意函数. 方程(8.2.33)是 w 关于 x 的二阶线性方程. 设 $w_1(x)$ 和 $w_2(x)$ 是方程(8.2.33)的两个线性无关的解,则

方程(8.2.33)的通解可以写为

$$w = C_1(y)w_1(x) + C_2(y)w_2(x) \tag{8.2.34}$$

其中 $C_1(y)$ 和 $C_2(y)$ 是 y 的任意函数.(8.2.34)式可以改写为

$$w = X(x)Y(y)v(x,y), \quad v(x,y) = f(x) + g(y) \tag{8.2.35}$$

其中 $X(x)$,$Y(y)$,$f(x)$ 和 $g(y)$ 是任意函数.

(8.2.35)式代入方程(8.2.31),得到

$$(XY)^2 f'(x)g'(y) = \frac{1}{2} \tag{8.2.36}$$

因而求得

$$XY = \sqrt{\frac{1}{2f'(x)g'(y)}} = \sqrt{\frac{1}{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}} \tag{8.2.37}$$

(8.2.37)式代入(8.2.35)式求得

$$w = \frac{v}{\sqrt{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}} = \frac{f(x) + g(y)}{\sqrt{2f'(x)g'(y)}} \tag{8.2.38}$$

所以,Liouville 方程(8.2.29)的解为

$$u = \ln\left\{\frac{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\right\} = \ln\left\{\frac{2f'(x)g'(y)}{[f(x) + g(y)]^2}\right\} \tag{8.2.39}$$

很易证明:Liouville 方程(8.2.29)的另一明显的解为

$$u = \ln\left\{\frac{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\cos^2 v}\right\} = \ln\left[2(1 + \tan^2 v)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{8.2.40}$$

类似,对于形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = k\mathrm{e}^u \quad (k = \text{常数}) \tag{8.2.41}$$

的 Liouville 方程,显然有解

$$u=\ln\left[\frac{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{kv^2}\right]=\ln\left\{\frac{2f'(x)g'(y)}{k[f(x)+g(y)]^2}\right\} \tag{8.2.42}$$

和

$$u=\ln\left[\frac{2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{k\cos^2 v}\right]=\ln\left\{\frac{2f'(x)g'(y)}{k\cos^2[f(x)+g(y)]}\right\} \tag{8.2.43}$$

又如，对于形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda e^u \quad (\lambda=\text{常数}) \tag{8.2.44}$$

的 Liouville 方程，可以通过变换

$$\xi=x-y,\quad \eta=x+y \tag{8.2.45}$$

化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\lambda}{4}e^u \tag{8.2.46}$$

这样，方程(8.2.44)有解

$$u=\ln\left[\frac{8\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\dfrac{\partial v}{\partial \eta}}{\lambda v^2}\right]=\ln\left\{\frac{8f'(x-y)g'(x+y)}{\lambda[f(x-y)+g(x+y)]^2}\right\} \tag{8.2.47}$$

和

$$u=\ln\left[\frac{8\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\dfrac{\partial v}{\partial \eta}}{\lambda\cos^2 v}\right]=\ln\left\{\frac{8f'(x-y)g'(x+y)}{\lambda\cos^2[f(x-y)+g(x+y)]}\right\} \tag{8.2.48}$$

例 8　定常的轴对称涡旋

应用柱坐标系(r,θ,z)，设v_r，v_θ和w分别为径向速度、切向速度和垂直速度，p和ρ分别为压强和密度，则运动方程和连续性

方程构成的方程组可以写为

$$\begin{cases} v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_\theta^2}{r} + w \dfrac{\partial v_r}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial r} + K\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_r}{r^2} + \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ v_r \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_r v_\theta}{r} + w \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} = K\left(\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r^2} + \dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \\ v_r \dfrac{\partial w}{\partial r} + w \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} + K\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{8.2.49}$$

其中 K 称为湍流系数，设为常数.

Burgers 假定：v_r 和 v_θ 只与 r 有关，w 只与 z 有关，则方程组(8.2.49)可以化为

$$\begin{cases} v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_\theta^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial r} + K \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) \right] \\ \dfrac{v_r}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) = K \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) \right] \\ w \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} + K \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \dfrac{\partial}{\partial z}(r w) = 0 \end{cases} \tag{8.2.50}$$

Burgers 进一步假定 w 是 z 的下列线性函数：

$$w = 2az \quad (a > 0, \text{常数}) \tag{8.2.51}$$

则由方程组(8.2.50)的第三式求得

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -4a^2 \rho z \tag{8.2.52}$$

而由方程组(8.2.50)的第四式求得

$$v_r = -ar \tag{8.2.53}$$

方程组(8.2.50)的第二个方程可以化为

$$d\ln \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\theta) = \frac{v_r}{K} \mathrm{d}r \tag{8.2.54}$$

(8.2.53)式代入(8.2.54)式，注意 $r=0$，v_θ 应有界，则积分求得

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{ar^2}{2K}}\right) \quad (r = \text{常数}) \tag{8.2.55}$$

而由方程组(8.2.50)的第一式求得

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}(a^2r^2 + 4a^2z^2) + \rho\int_0^r \frac{v_\theta^2}{r}\mathrm{d}r \quad (p_0 = \text{常数}) \tag{8.2.56}$$

如此求得的方程组(8.2.49)的解称为Burgers单圈涡旋解.

Sullivan对Burgers的涡旋模式作了改进.他也假定v_r和v_θ只与r有关,但w为一只与r有关的函数与z的乘积,这样,方程组(8.2.49)化为

$$\begin{cases} v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_\theta^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} + K\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right] \\ \dfrac{v_r}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = K\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right] \\ v_r\dfrac{\partial w}{\partial r} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + K\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \dfrac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \end{cases} \tag{8.2.57}$$

Sullivan进一步假定:

$$v_r = F(r), \quad w = 2azG(r) \tag{8.2.58}$$

其中$F(r)$和$G(r)$是r的待定函数.

Sullivan又规定,在现在的情况(8.2.52)式仍然成立,这样,方程组(8.2.57)的第三和第四两式化为

$$\begin{cases} F\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} + 2aG^2 = 2a + K\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rF) + 2arG = 0 \end{cases} \tag{8.2.59}$$

这是包含F和G的非线性方程组.考虑到Burgers涡旋解的基本特征,求解方程组时,可以设

$$\begin{cases} rF = A_1 + A_2r + A_3r^2 + A_4e^{-ar^2/2K} \\ G = B_1 + B_2r + B_3r^2 + B_4e^{-ar^2/2K} \end{cases} \tag{8.2.60}$$

代入方程组(8.2.59)，定得

$$\begin{cases}A_1 = 6K, A_2 = 0, A_3 = -a, A_4 = -6K, \\ B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 0, B_4 = -3\end{cases} \tag{8.2.61}$$

因而求得

$$\begin{cases}v_r = -ar + \dfrac{6K}{r}\left(1 - e^{-ar^2/2K}\right) \\ w = 2az\left(1 - 3e^{-ar^2/2K}\right)\end{cases} \tag{8.2.62}$$

再由方程组(8.2.57)的第一和第二两式求得

$$\begin{cases}v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}[H(ar^2/2K)/H(\infty)] \\ p = p_0 - \dfrac{\rho}{2}\left[a^2r^2 + 4a^2z^2 + 36\dfrac{K^2}{r^2}(1 - e^{-ar^2/2K})^2\right] + \rho\displaystyle\int_0^r \frac{v_\theta^2}{r}\mathrm{d}r\end{cases} \tag{8.2.63}$$

其中

$$H(x) = \int_0^x \exp\left\{-\xi + 3\int_0^\xi \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\xi \tag{8.2.64}$$

如此求得的方程组(8.2.49)的解称为 Sullivan 两圈涡旋解.

例 9 Born-Infeld 方程

在(1.2.20)式中已经标记过的 Born-Infeld 方程为

$$\left[c_0^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8.2.65}$$

若设

$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t \tag{8.2.66}$$

注意

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right), \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -c_0\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{cases} \tag{8.2.67}$$

则 Born-Infeld 方程(8.2.65)化为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \tag{8.2.68}$$

显然

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \tag{8.2.69}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{8.2.70}$$

均满足方程(8.2.68). 所以,Born-Infeld 方程(8.2.65)有通解

$$u = F(x - c_0 t) \tag{8.2.71}$$

或

$$u = G(x + c_0 t) \tag{8.2.72}$$

其中 $F(x-c_0t)$和 $G(x+c_0t)$分别是 $x-c_0t$ 和 $x+c_0t$ 的任意函数.

8.3 Hopf-Cole 变换

Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\nu > 0) \tag{8.3.1}$$

若令

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{8.3.2}$$

代入方程(8.3.1)并对 x 积分一次,取积分常数为零,得到

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8.3.3}$$

它也称为 Burgers 方程.

首先,我们建立 Burgers 方程与线性耗散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{8.3.4}$$

之间的联系，为此，令

$$v = F(w) \tag{8.3.5}$$

因为

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F'(w)\frac{\partial w}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial x} = F'(w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8.3.6}$$

则方程(8.3.4)化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\nu F''}{F'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8.3.7}$$

方程(8.3.7)与方程(8.3.3)比较得

$$\frac{\nu F''}{F'} = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad F'' + \frac{1}{2\nu}F' = 0 \tag{8.3.8}$$

因而

$$v = F(w) = A + Be^{-\frac{1}{2\nu}w} \tag{8.3.9}$$

其中 A 和 B 为积分常数，如取 $A=0, B=1$，则

$$v = F(w) = e^{-\frac{1}{2\nu}w} \tag{8.3.10}$$

因而

$$w = -2\nu\ln F = -2\nu\ln v \tag{8.3.11}$$

这样，(8.3.2)式改写为

$$u = -2\nu\frac{\partial \ln F}{\partial x} = -2\nu\frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.3.12}$$

它称为 Hopf-Cole 变换. 对 Burgers 方程(8.3.1)，若作 Hopf-Cole 变换(8.3.12)，则关于 u 的 Burgers 方程就化成了关于 v 的线性耗散方程. 这样，可以根据方程(8.3.4)的解去求 Burgers 方程(8.3.1)的解. 例如，线性耗散方程(8.3.4)显然有一个解：

$$v = 1 + e^{kx-\omega t} \quad \left(k = -\frac{c}{\nu}, \omega = kc\right) \tag{8.3.13}$$

(8.3.13)式代入(8.3.12)式求得

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x}\ln\left[1 + \mathrm{e}^{-\frac{c}{\nu}(x-ct)}\right] = c\left(1 - \tanh\frac{c}{2\nu}\xi\right)$$

(8.3.14)

这就是 Burgers 方程的冲击波解，它是(6.2.9)式中 $\xi_0=0, A=0$, $u_1^*-u_2^*=2c$ 的结果.

又例如，线性耗散方程(8.3.4)有解

$$v = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\mathrm{e}^{-x^2/4\nu t} \tag{8.3.15}$$

把它代入(8.3.12)式求得

$$u = \frac{\frac{x}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\mathrm{e}^{-x^2/4\nu t}}{1+\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\mathrm{e}^{-x^2/4\nu t}} = \frac{\frac{x}{t}}{1+2\sqrt{\pi\nu t}\mathrm{e}^{x^2/4\nu t}} \tag{8.3.16}$$

若把(8.3.12)式的两边对 x 从 0 到∞积分，并引进 Reynolds 数，则有

$$Re \equiv \frac{\int_0^{\infty} u\mathrm{d}x}{2\nu} = \ln v(0,t) = \ln\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\right) \tag{8.3.17}$$

这样，解(8.3.16)式可以改写为

$$u = \frac{\frac{x}{t}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{Re}-1}\mathrm{e}^{x^2/4\nu t}} \tag{8.3.18}$$

又例如，Burgers 方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_0(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \tag{8.3.19}$$

可以通过 Hopf-Cole 变换(8.3.12)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v|_{t=0} = v_0(x) \equiv \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x u_0(x)\mathrm{d}x} \end{cases} \tag{8.3.20}$$

因问题(8.3.20)的解为

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4\nu t}\mathrm{d}\xi \tag{8.3.21}$$

则 Burgers 方程初值问题(8.3.19)的解为

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}\mathrm{e}^{-G(\xi;x,t)/2\nu}\mathrm{d}\xi\bigg/\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-G(\xi;x,t)/2\nu}\mathrm{d}\xi \tag{8.3.22}$$

其中

$$G(\xi;x,t) = \int_0^{\xi} u_0(\xi')\mathrm{d}\xi' + \frac{(x-\xi)^2}{2t} \tag{8.3.23}$$

其次,我们还可以把 Burgers 方程推广为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + G(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8.3.24}$$

它也可以通过(8.3.5)式的变换化为方程(8.3.4).此时将(8.3.15)式与(8.3.7)式比较有:

$$\frac{\nu F''}{F'} = -G(w) \tag{8.3.25}$$

由此求得 F,即可求得 w.例如 $G(w)=-\alpha$(常数),则由(8.3.25)式求得

$$v = F(w) = \frac{\nu}{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\nu}w} \tag{8.3.26}$$

所以

$$w = \frac{\nu}{\alpha}\ln(\alpha v/\nu) \tag{8.3.27}$$

8.4 推广的 Hopf-Cole 变换

我们就 KdV 方程和 KdV-Burgers 方程分别说明.

1. KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{8.4.1}$$

在第六章我们已求得了它的椭圆余弦波解和孤立波解.

既然 Burgers 方程(8.4.1)可以通过 Hopf-Cole 变换(8.3.12)化为线性方程，而 KdV 方程最高阶导数为三阶，比 Burgers 方程的最高阶导数多一阶，人们会自然地想到，对 KdV 方程也可作类似的变换.

仿 Burgers 方程，对 KdV 方程(8.4.1)，我们首先令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8.4.2}$$

代入方程(8.4.1)并对 x 积分一次，取积分常数为零，得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.4.3}$$

它也称为 KdV 方程. 其次，令

$$w=12\beta\frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.4.4}$$

因而方程(8.4.3)化为

$$\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x\partial t}+6\beta\left(\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}\right)^2+\beta\frac{\partial^4 \ln v}{\partial x^4}=0 \tag{8.4.5}$$

注意

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \ln v}{\partial x\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)=\dfrac{1}{v^2}\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)\\ \dfrac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{v^2}\left[-\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\\ \dfrac{\partial^3 \ln v}{\partial x^3}=\dfrac{1}{v^3}\left[-3v\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^3+v^2\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]\\ \dfrac{\partial^4 \ln v}{\partial x^4}=\dfrac{1}{v^4}\left[-3v^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-4v^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right.\\ \qquad\qquad \left.+12v\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-6\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^4+v^3\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right]\end{cases} \tag{8.4.6}$$

以(8.4.6)式代入方程(8.4.5)，并乘以 v^2 得到

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\beta\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0 \tag{8.4.7}$$

尽管这个方程仍旧是非线性方程,但我们可取

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \beta \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{8.4.8}$$

则方程(8.4.7)成立. 注意(8.4.8)的第二式可改写为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \tag{8.4.9}$$

这样,方程(8.4.8)可以改写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\alpha = \text{常数}) \tag{8.4.10}$$

(8.4.10)式的两个方程都是线性方程,称为双线性方程(bilinear equation). 要同时满足这两个方程的解不难找到为

$$v = 1 + e^{2(kx-\omega t)} \quad (\omega = 4\beta k^3, \alpha = 2k) \tag{8.4.11}$$

(8.4.11)式代入(8.4.4)式求得

$$w = 12\beta k e^{(kx-\omega t)} \operatorname{sech}(kx - \omega t) \tag{8.4.12}$$

再代入(8.4.2)式求得

$$u = 12\beta k^2 \operatorname{sech}^2(kx - \omega t) \tag{8.4.13}$$

这就是 KdV 方程(8.4.1)的孤立子解. 因由(8.4.11)式

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = 4\beta k^2 \tag{8.4.14}$$

因此,(8.4.13)式与(6.3.21)式完全一致.

上述分析告诉我们,对于 KdV 方程(8.4.1),我们可以通过推广的 Hopf-Cole 变换

$$u = 12\beta \frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} \quad \left(u = \frac{\partial w}{\partial x}, w = 12\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x}\right) \tag{8.4.15}$$

使它化为线性方程.

这种特殊变换法还可以使我们获得 KdV 方程的更多的解. 为此,引进小参数 ε,而设方程(8.4.7)的解为

$$v = 1 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \cdots \tag{8.4.16}$$

其中 v_1, v_2 和 v_3 分别表示 v 的一级、二级和三级近似.

(8.4.16)式代入方程(8.4.7)求得它的一级近似、二级近似和三级近似方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)=0 \tag{8.4.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)=\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)$$
$$-3\beta\left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right] \tag{8.4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right)=\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)$$
$$-3\beta\left[2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}-\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right] \tag{8.4.19}$$

我们取一级近似方程(8.4.17)的解为两个波的叠加,即取为

$$v_1=\mathrm{e}^{2(k_1x-\omega_1t-\delta_1)}+\mathrm{e}^{2(k_2x-\omega_2t-\delta_2)}\quad(\omega_1=4\beta k_1^3,\omega_2=4\beta k_2^3) \tag{8.4.20}$$

其中 δ_1 和 δ_2 为常数.

以(8.4.20)式代入二级近似方程(8.4.18)的右端,使第一项为零,而方程(8.4.18)化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)=48\beta k_1k_2(k_1-k_2)^2\mathrm{e}^{2[(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t-(\delta_1+\delta_2)]} \tag{8.4.21}$$

上式对 x 积分一次,取积分常数为零得到

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}=\frac{24\beta k_1k_2(k_1-k_2)^2}{k_1+k_2}\mathrm{e}^{2[(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t-(\delta_1+\delta_2)]} \tag{8.4.22}$$

不难求得方程(8.4.22)的特解为

$$v_2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2\mathrm{e}^{2[(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t-(\delta_1+\delta_2)]} \tag{8.4.23}$$

(8.4.20)式和(8.4.23)式代入三级近似方程(8.4.19)有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right)=48\beta(k_1-k_2)^2\left[-k_1k_2+\frac{k_1^2k_2}{k_1+k_2}-2k_1^2\right.$$
$$\left.+k_1(k_1+k_2)+\frac{k_1^3}{k_1+k_2}\right]\mathrm{e}^{2[(2k_1+k_2)x-(2\omega_1+\omega_2)t-(2\delta_1-\delta_2)]}$$
$$+48\beta(k_1-k_2)^2\left[-k_1k_2+\frac{k_1k_2^2}{k_1+k_2}-2k_2^2\right.$$
$$\left.+k_2(k_1+k_2)+\frac{k_2^3}{k_1+k_2}\right]\mathrm{e}^{2[(k_1+2k_2)x-(\omega_1+2\omega_2)t-(\delta_1+2\delta_2)]} \quad (8.4.24)$$

不难验证,(8.4.24)式右端方括号内的数为零,因而

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right)=0 \quad (8.4.25)$$

它的形式与一级近似方程(8.4.17)相同.因此,这里我们取方程(8.4.25)的特解为零,即

$$v_3=0 \quad (8.4.26)$$

同理可以有

$$v_j=0 \quad (j=4,5,\cdots) \quad (8.4.27)$$

这样,(8.4.16)式的级数中断到$\varepsilon^2 v_2$为止,不妨取$\varepsilon=1$,则有

$$v=1+v_1+v_2=1+a_1\mathrm{e}^{2\theta_1}+a_2\mathrm{e}^{2\theta_2}+a_3\mathrm{e}^{2(\theta_1+\theta_2)} \quad (8.4.28)$$

其中

$$a_1=\mathrm{e}^{-2\delta_1},\quad a_2=\mathrm{e}^{-2\delta_2},\quad a_3=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 a_1a_2 \quad (8.4.29)$$

和

$$\theta_1=k_1x-\omega_1t,\quad \theta_2=k_2x-\omega_2t \quad (8.4.30)$$

(8.4.28)式代入(8.4.15)式求得

$$w=12\beta\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+a_1\mathrm{e}^{2\theta_1}+a_2\mathrm{e}^{2\theta_2}+a_3\mathrm{e}^{2(\theta_1+\theta_2)}\},\quad u=\frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.4.31)$$

它称为 KdV 方程(8.4.1)的双孤立子解.

事实上,由(8.4.29)式看到$\frac{a_3}{a_1a_2}$的值是确定的,而且 a_1 和 a_2 可以任意选取,为了简化,,我们取

$$a_1 = a_2 = \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}, \quad a_3 = 1 \tag{8.4.32}$$

则由(8.4.31)式求得

$$\begin{aligned} w &= 12\beta \frac{2k_1 \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1} e^{2\theta_1} + 2k_2 \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1} e^{2\theta_2} + 2(k_2 + k_1) e^{2(\theta_1 + \theta_2)}}{1 + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1} e^{2\theta_1} + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1} e^{2\theta_2} + e^{2(\theta_1 + \theta_2)}} \\ &= 12\beta(k_2 + k_1) \left\{ \frac{\frac{2k_1}{k_2 - k_1} e^{2\theta_1} + \frac{2k_2}{k_2 - k_1} e^{2\theta_2} + 2e^{2(\theta_1 + \theta_2)}}{[1 + e^{2(\theta_1 + \theta_2)}] + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}(e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2})} \right\} \end{aligned} \tag{8.4.33}$$

上式的分子和分母同乘以 $e^{-(\theta_1+\theta_2)}$,得到

$$w = 12\beta(k_2 + k_1) \left\{ \frac{\frac{2k_1}{k_2 - k_1} e^{-(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{2k_2}{k_2 - k_1} e^{(\theta_2 - \theta_1)} + 2e^{(\theta_1 - \theta_2)}}{[e^{(\theta_1 + \theta_2)} + e^{-(\theta_1 + \theta_2)}] + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}[e^{(\theta_2 - \theta_1)} + e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]} \right\} \tag{8.4.34}$$

注意,上式花括号内的分子可以改写为

$$\begin{aligned} &\frac{2k_1}{k_2 - k_1} e^{-(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{2k_2}{k_2 - k_1} e^{(\theta_2 - \theta_1)} + 2e^{(\theta_1 - \theta_2)} \\ &\quad = \left\{ [e^{(\theta_1 + \theta_2)} + e^{-(\theta_1 + \theta_2)}] + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}[e^{(\theta_2 - \theta_1)} + e^{-(\theta_2 - \theta_1)}] \right\} \\ &\quad\quad + \{[e^{(\theta_1 + \theta_2)} - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}] + [e^{(\theta_2 - \theta_1)} - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]\} \end{aligned} \tag{8.4.35}$$

因而,(8.4.34)式可改写为

$$w = 12\beta(k_2 + k_1) \left\{ 1 + \frac{[e^{(\theta_1 + \theta_2)} - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}] + [e^{(\theta_2 - \theta_1)} - e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]}{[e^{(\theta_1 + \theta_2)} + e^{-(\theta_1 + \theta_2)}] + \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}[e^{(\theta_2 - \theta_1)} + e^{-(\theta_2 - \theta_1)}]} \right\}$$

$$=12\beta(k_2+k_1)\left\{1+\frac{\sinh(\theta_1+\theta_2)+\sinh(\theta_2-\theta_1)}{\cosh(\theta_1+\theta_2)+\dfrac{k_2+k_1}{k_2-k_1}\cosh(\theta_2-\theta_1)}\right\}$$

$$=12\beta\left\{(k_1+k_2)+(k_2^2-k_1^2)\right.$$

$$\left.\frac{\sinh(\theta_1+\theta_2)+\sinh(\theta_2-\theta_1)}{(k_2-k_1)\cosh(\theta_1+\theta_2)+(k_2+k_1)\cosh(\theta_2-\theta_1)}\right\} \quad (8.4.36)$$

因为

$$\begin{cases}\sinh\alpha \pm \sinh\beta = 2\sinh\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cosh(\alpha\pm\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta\pm\sinh\alpha\sinh\beta\end{cases} \quad (8.4.37)$$

则(8.4.36)式还可以改写为

$$w=12\beta\left\{(k_1+k_2)+(k_2^2-k_1^2)\cdot\frac{\sinh\theta_2\cosh\theta_1}{k_2\cosh\theta_1\cosh\theta_2-k_1\sinh\theta_1\sinh\theta_2}\right\}$$

$$=12\beta\left\{(k_1+k_2)+\frac{k_2^2-k_1^2}{k_2\coth\theta_2-k_1\tanh\theta_1}\right\} \quad (8.4.38)$$

这样，因 $u=\dfrac{\partial w}{\partial x}$，则由(8.4.36)式或(8.4.38)式最后求得

$$u=12\beta\left\{2(k_2^2-k_1^2)\right.$$

$$\left.\times\frac{(k_2^2-k_1^2)+k_2^2\cosh 2\theta_2+k_1^2\cosh 2\theta_1}{[(k_2-k_1)\cosh(\theta_1+\theta_2)+(k_2+k_1)\cosh(\theta_2-\theta_1)]^2}\right\}$$

$$(8.4.39)$$

或

$$u=12\beta\left\{(k_2^2-k_1^2)\cdot\frac{k_2^2\operatorname{csch}^2\theta_2+k_1^2\operatorname{csch}^2\theta_1}{(k_2\coth\theta_2-k_1\tanh\theta_1)^2}\right\} \quad (8.4.40)$$

(8.4.39)式或(8.4.40)式就是 KdV 方程(8.4.1)的双孤立子解.

为了方便，以后我们常采用形式为(6.3.35)式的 KdV 方程，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (8.4.41)$$

此时可通过推广的 Hopf-Cole 变换

$$u=-2\frac{\partial^2\ln v}{\partial x^2}\quad\left(u=\frac{\partial w}{\partial x},w=-2\frac{\partial\ln v}{\partial x}\right)\quad(8.4.42)$$

化为

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0$$

$$(8.4.43)$$

这是方程(8.4.7)中 $\beta=1$ 的情况. 此时,将(8.4.11)式(其中 $\beta=1$)代入(8.4.42)式求得

$$w=-2ke^{(kx-\omega t)}\mathrm{sech}(kx-\omega t)\quad(\omega=4k^3)\quad(8.4.44)$$

和

$$u=-2k^2\mathrm{sech}^2k(x-4k^2t)\qquad(8.4.45)$$

这是(6.3.37)式中 $c=4k^2$ 的情况. (8.4.45)式就是 KdV 方程(8.4.41)的单孤立子解,而它的双孤立子解应为

$$u=\frac{\partial w}{\partial x},\quad w=-2\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+a_1e^{2\theta_1}+a_2e^{2\theta_2}+a_3e^{2(\theta_1+\theta_2)}\}$$

$$(8.4.46)$$

若取 $k_1=1,k_2=2$,相应 $\omega_1=4,\omega_2=32$,又取 $a_1=a_2=3$,相应 $a_3=1$,并且 $\theta_1=x-4t,\theta_2=2(x-16t),\theta_1+\theta_2=3(x-12t)$,由此求得

$$w=-6\left\{\frac{2e^{2(x-4t)}+4e^{4(x-16t)}+2e^{6(x-12t)}}{1+3e^{2(x-4t)}+3e^{4(x-16t)}+e^{6(x-12t)}}\right\}\quad(8.4.47)$$

上式花括号实际就是(8.4.33)式的花括号中 $k_1=1,k_2=2$ 的情况. 因而(8.4.47)的分子和分母同乘以 $e^{-3(x-12t)}$,得到

$$\begin{aligned}w&=-6\left\{\frac{2e^{-(x-28t)}+4e^{(x-28t)}+2e^{3(x-12t)}}{[e^{3(x-12t)}+e^{-3(x-12t)}]+3[e^{(x-28t)}+e^{-(x-28t)}]}\right\}\\&=-6\left\{1+\frac{\sinh(3x-36t)+\sinh(x-28t)}{\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)}\right\}\\&=-6\left\{1+\frac{1}{2\coth(2x-32t)-\tanh(x-4t)}\right\}\end{aligned}\quad(8.4.48)$$

再由 $u=\frac{\partial w}{\partial x}$ 求得

$$u=-24\left\{\frac{e^{2(x-4t)}+4e^{4(x-16t)}+6e^{6(x-12t)}+4e^{8(x-10t)}+e^{2(5x-68t)}}{[1+3e^{2(x-4t)}+3e^{4(x-16t)}+e^{6(x-12t)}]^2}\right\}$$

$$=-12\left\{\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)]^2}\right\}$$

$$=-6\left\{\frac{4\operatorname{csch}^2(2x-32t)+\operatorname{sech}^2(x-4t)}{[2\coth(2x-32t)-\tanh(x-4t)]^2}\right\} \tag{8.4.49}$$

这就是 KdV 方程(8.4.41)的双孤立子解.

在(8.4.45)式和(8.4.49)式中取 $t=0$ 就分别得到 KdV 方程(8.4.41)单孤立子解和双孤立子解的初值是

$$u\Big|_{t=0}=-2k^2\operatorname{sech}^2 kx \tag{8.4.50}$$

和

$$u\Big|_{t=0}=-24\frac{e^{2x}(1+e^{2x})^4}{(1+e^{2x})^6}=-6\operatorname{sech}^2 x \tag{8.4.51}$$

在(8.4.50)式中取 $k=1$ 就化为

$$u\Big|_{t=0}=-2\operatorname{sech}^2 x \tag{8.4.52}$$

2. KdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.4.53}$$

在第 6 章我们求得了它的鞍-结冲击波解，现在我们也可应用推广的 Hopf-Cole 变换把它化为线性方程. 首先，令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8.4.54}$$

代入方程(8.4.53)并对 x 积分一次，取积分常数为零，得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.4.55}$$

它也称为 KdV-Burgers 方程. 其次，令

$$w=-\frac{12}{5}\nu\ln v+12\beta\frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.4.56}$$

代入方程(8.4.55)经过整理得到

$$
-\frac{1}{5}\nu v\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+\beta v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)
$$

$$
-\beta\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\beta^2\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]
$$

$$
-\frac{1}{5}\nu\left[-\frac{\nu}{5}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\beta\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0 \qquad (8.4.57)
$$

再代入(8.4.54)式求得

$$u = 2c - \frac{3\nu^2}{25\beta}\left(1 + \tanh \frac{\nu}{10\beta}\xi\right)^2 \quad (\xi = x - ct)$$

(8.4.62)

其中

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = -\nu k + \beta k^2 = \frac{6\nu^2}{25\beta} \qquad (8.4.63)$$

(8.4.62)式与(6.10.18)式是完全一致的($\xi_0=0, A=0, u_1^*=2c$).

上述分析告诉我们,KdV-Burgers 方程可以通过推广的 Hopf-Cole 变换

$$u = -\frac{12}{5}\nu \frac{\partial \ln v}{\partial x} + 12\beta \frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} \qquad (8.4.64)$$

化为线性方程.

8.5 Hirota 方法

上一节,对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (8.5.1)$$

应用推广的 Hopf-Cole 变换

$$u = 12\beta \frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} \quad \left(u = \frac{\partial w}{\partial x}, w = 12\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x}\right) \qquad (8.5.2)$$

使 KdV 方程(8.5.1)化为(8.4.7)式,也就是

$$\left(v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \beta\left[v\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 4\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right] = 0$$

(8.5.3)

这个方程在形式上比 KdV 方程复杂得多.尽管上一节我们做了双线性方程的处理并求得了解,但我们会问:其他的非线性演化方程是否有类似(8.5.2)式的因变量变换(当然,上一节我们将推广的 Hopf-Cole 变换也应用到了 KdV-Burgers 方程)呢?经过这类变换

化成的形如(8.5.3)式的双线性形式(bilinear form)有没有规律可循呢？为此，Hirota 引进了双线性算子(bilinear operator)：

$$D_t^m D_x^n (f\cdot g)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}} \tag{8.5.4}$$

其中 m 和 n 为非负整数.例如

$$D_t(f\cdot g)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}=g\frac{\partial f}{\partial t}-f\frac{\partial g}{\partial t} \tag{8.5.5}$$

$$D_x(f\cdot g)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}=g\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial g}{\partial x} \tag{8.5.6}$$

$$\begin{aligned}D_x^2(f\cdot g)&\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}\\&=g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{8.5.7}$$

$$\begin{aligned}D_x^3(f\cdot g)&\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^3 f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}\\&=g\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-3\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\end{aligned} \tag{8.5.8}$$

$$\begin{aligned}D_x^4(f\cdot g)&\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^4 f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}\\&=g\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-4\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+6\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-4\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\end{aligned} \tag{8.5.9}$$

$$\begin{aligned}D_tD_x(f\cdot g)&\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}\\&=g\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}+f\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}\end{aligned} \tag{8.5.10}$$

这样就有

$$D_t(f\cdot f)=0,\quad D_x(f\cdot f)=0,\quad D_x^3(f\cdot f)=0 \tag{8.5.11}$$

$$D_x^2(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] \tag{8.5.12}$$

$$D_x^4(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-4\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right] \tag{8.5.13}$$

$$D_tD_x(f\cdot f)=2\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{8.5.14}$$

将(8.5.13)式和(8.5.14)式比较后发现，方程(8.5.3)能简单写为

$$D_x(D_t+\beta D_x^3)(v\cdot v)=0 \tag{8.5.15}$$

它是 KdV 方程(8.5.1)的双线性形式. 非常有意思的是：如果我们把 D_t 和 D_x 分别看成为$\frac{\partial}{\partial t}$和$\frac{\partial}{\partial x}$的话，$D_t+\beta D_x^3$ 就是 KdV 方程(8.5.3)的线性化(把 KdV 方程(8.5.3)中的非线性项舍弃)的算子. 而且，(8.5.15)式在形式上看起来要比(8.5.3)式要简单得多.

显然，对于形如(8.4.41)式的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.5.16}$$

合适的因变量变换应是(8.4.42)式，即

$$u=-2\frac{\partial^2\ln v}{\partial x^2} \tag{8.5.17}$$

而相应的双线性方程(8.4.43)应改写为

$$D_x(D_t+D_x^3)(v\cdot v)=0 \tag{8.5.18}$$

迄今为止，Hirota 方法已经用于很多非线性方程，显示出它的生命力，我们举几例说明，详细讨论留给本章末习题.

例 1 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-3\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0 \tag{8.5.19}$$

(此种形式见习题 6.15).

经过因变量变换(8.5.17)，它的双线性形式为

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(v \cdot v) = 0 \tag{8.5.20}$$

例 2 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{8.5.21}$$

(此种形式见习题 6.9).

经过因变量变换(8.5.17)，它的双线性形式为

$$(D_t D_x + D_x^4 + 3D_y^2)(v \cdot v) = 0 \tag{8.5.22}$$

例 3 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0 \tag{8.5.23}$$

(此种形式见习题 6.16).

该方程需作下列因变量变换

$$u = G/F \tag{8.5.24}$$

其中 F 是实函数. 这样，方程(8.5.23)可以化为

$$\begin{cases}(\mathrm{i}D_t + D_x^2)(G \cdot F) = 0 \\ D_x^2 F \cdot F - 2|G|^2 = 0\end{cases} \tag{8.5.25}$$

至于应用 Hirota 方法获得的双线性方程的求解，我们仍可以采用(8.4.16)式的展为 ε 的幂级数解法.

例如，对于 KdV 方程(8.5.1)的双线性形式(8.5.15)的求解，以(8.4.16)式代入求得(8.5.15)式的一级、二级和三级近似分别是

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)v_1 = 0 \tag{8.5.26}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)v_2 = -D_x(D_t + \beta D_x^3)(v_1 \cdot v_1) \tag{8.5.27}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)v_3 = -D_x(D_t + \beta D_x^3)(v_2 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2) \tag{8.5.28}$$

对于方程(8.5.26),若取

$$v_1 = e^{2(kx-4\beta k^3 t)} \tag{8.5.29}$$

则它自动满足方程(8.5.26),且以(8.5.29)式代入方程(8.5.27),得到

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)v_2 = 0 \tag{8.5.30}$$

因而

$$v_2 = 0 \tag{8.5.31}$$

同理,由方程(8.5.28)有

$$v_3 = 0 \tag{8.5.32}$$

接着有

$$v_j = 0 \quad (j = 4,5,\cdots) \tag{8.5.33}$$

这样,在(8.4.16)式中取 $\varepsilon=1$ 有

$$v = 1 + v_1 = 1 + e^{2(kx-4\beta k^3 t)} \tag{8.5.34}$$

(8.5.34)式代入(8.5.2)式求得

$$u = 12\beta k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4\beta k^3 t) \tag{8.5.35}$$

这就是 KdV 方程(8.5.1)的单孤立子解.

类似地,对于方程(8.5.26),若取

$$v_1 = e^{2(k_1 x - 4\beta k_1^3 t - \delta_1)} + e^{2(k_2 x - 4\beta k_2^3 t - \delta_2)} \tag{8.5.36}$$

则代入方程(8.5.27),求得

$$v_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{2[(k_1+k_2)x - 4\beta(k_1^3+k_2^3)t - (\delta_1+\delta_2)]} \tag{8.5.37}$$

以后有

$$v_j = 0 \quad (j \geqslant 3) \tag{8.5.38}$$

这样,最后可求得 KdV 方程(8.5.1)的双孤立子解.

习 题 8

8.1 求下列线性方程的特征线和 Riemann 不变量

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+g\,\dfrac{\partial h}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+H\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$

其中 g,H 为常数.(提示:可引入 $c_0=\sqrt{gH}$)

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial p(v)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-c_0\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}+L\,\dfrac{\partial I}{\partial t}+RI=0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial x}+C\,\dfrac{\partial v}{\partial t}+GV=0 \end{cases}$

其中 R,G,L,C 为常数.

8.2 求非线性声波方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{c_s^2}{\rho_0}\,\dfrac{\partial \rho'}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial \rho'}{\partial x}+\rho_0\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases} \quad (\rho_0, c_s^2 \text{ 为常数})$$

的特征线和 Riemann 不变量.

8.3 求非线性惯性浅水波方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\,\dfrac{\partial h}{\partial x}-f_0 v=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial v}{\partial x}+f_0 u=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

的特征线和 Riemann 不变量.

8.4 求非线性平流方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 的下列混合问题

$$u(x,0)=\cos\pi x, \quad u(x+2,t)=u(x,t)$$

8.5 用自变量或因变量变换求解

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda^2 h e^{2hu}=0$

8.6 逆变换方法. 为了建立非线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial y}$$

与已知的线性方程

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

之间的联系. 我们设 $u(x,y)$是 $v(x,y)$关于 x 的反函数,即

$$x=v(u,y)$$

(1) 若令 $\phi=\frac{\partial v}{\partial x},\psi=\frac{\partial v}{\partial y}$,证明

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\psi,\quad \frac{\partial v}{\partial u}=\phi(u,y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\psi(u,y),\quad \frac{\partial \phi}{\partial u}=\psi(u,y)$$

(2) 若令 $\alpha=\phi(u,y),\beta=\psi(u,y)$,证明

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=1,\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\beta=0,\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}=\beta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\beta}{\alpha}$$

(3) 证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial y}$ $\left(注意\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

(4) 证明 $\alpha^2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}=\frac{\partial \alpha}{\partial y}\left(注意\frac{\partial \alpha}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$,因而

$$\alpha=\phi(u,y)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=u}=\frac{\partial v}{\partial u}$$

8.7 $v=y^{-1/2}e^{-x^2/4y}$满足$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,证明 $x=y^{-1/2}e^{-u^2/4y}$,即 $u^2=-4y\ln(xy^{-1/2})$必满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial y}$.

8.8 依 8.7 题,证明

(1) $u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$的解为$\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2$

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$的解为$\dfrac{\partial v}{\partial u}$关于 x 的反函数.

8.9 证明:热传导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

通过变换 $v=e^{\int F(u)dx}$化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F''}{F'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+2\nu F(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

8.10 证明:热传导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

(1) 通过变换 $v=F(u)f(t)$化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F''}{F'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{f'}{f}\cdot\frac{F}{F'}$$

(2) 若取 $f(t)=e^{-kt},\dfrac{F'}{F}=G(u)$,则

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-G'}{G}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+kG(u)$$

(3) 若取 $G(u)=\dfrac{u(\theta-u)}{\theta}$,则

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{\theta-u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{ku(\theta-u)}{\theta}$$

(4) 若取 $F(u)=\dfrac{u}{\theta-u},f(t)=e^{-kt}$,则

$$u=\theta v(v+e^{kt})$$

8.11 在下列初条件下,求解初值问题(8.3.19)

(1) $u_0(x)=\begin{cases}u_1, & x<x_0\\ u_2, & x>x_0\end{cases}\quad(u_1>u_2)$

提示:作变换 $\xi=\dfrac{x-x_0-\dfrac{(u_1+u_2)t}{2}}{2(u_1-u_2)},\quad \tau=\dfrac{t}{4(u_1-u_2)^2}$,

$v=\dfrac{2u-(u_1+u_2)}{u_1-u_2}$

(2) $u_0(x)=\begin{cases}u_1, & x<x_0\\ u_2, & x>x_0\end{cases}\quad (u_2>u_1)$

提示：作变换 $\xi=\dfrac{x-x_0-\dfrac{(u_1+u_2)t}{2}}{2(u_2-u_1)}$，　$\tau=\dfrac{t}{4(u_2-u_1)^2}$，$v=\dfrac{2u-(u_1+u_2)}{u_2-u_1}$.

8.12　证明方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+au+bu^2=0$$

满足初条件

$$u\Big|_{t=0}=f(x)$$

的解为

$$u=e^{-(at+bx)}f(\xi).$$

其中

$$\xi=F_1(x)-F_2(t)e^{bx}u,\quad F_1(x)=\frac{1}{6}(e^{bx}-1),$$

$$F_2(t)=\frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

8.13　证明下列 Liouville 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{\alpha u}$$

有解

$$u=f(x)-g(y)-\frac{2}{\alpha}\ln F(x,y)$$

其中

$$F(x,y)=\beta\int_{x_0}^{x}e^{\alpha f(\xi)}d\xi+\frac{\alpha}{2\beta}\int_{y_0}^{y}e^{\alpha g(\eta)}d\eta$$

β 为任意常数，$f(x)$和 $g(y)$为任意函数.

8.14　证明

(1) $D_t D_x(u \cdot 1) = D_t D_x(1 \cdot u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$

(2) $D_x^m(u \cdot v) = (-1)^m D_x^m(v \cdot u)$，并当 m 为奇数时，

$$D_x^m(u \cdot u) = 0$$

(3) $D_t^m D_x^m(u \cdot v) = D_x^n D_t^m(u \cdot v)$

(4) $D_t^m D_x^n(e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2}) = (\omega_2 - \omega_1)^m (k_1 - k_2)^n e^{\theta_1 - \theta_2}$，其中

$$\theta_1 = k_1 x - \omega_1 t, \theta_2 = k_2 x - \omega_2 t$$

8.15 若令 $u = -2 \dfrac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}$，证明 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0$$

的双线性形式为

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(v \cdot v) = 0$$

8.16 若令 $u = -2 \dfrac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}$，证明 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的双线性形式为

$$(D_t D_x + D_x^4 + 3D_y^2)(v \cdot v) = 0$$

*8.17 若令 $u = G/F$（F 为实函数），证明 NLS 方程

$$\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0$$

的双线性形式为

$$(\mathrm{i}D_t + D_x^2)G \cdot F = 0, \quad D_x^2 F \cdot F - 2|G|^2 = 0$$

*8.18 若令 $\tan \dfrac{u}{4} = \dfrac{G}{F}$，证明正弦-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u$$

的双线性形式为

$$(D_x^2 - D_t^2 - 1)(F \cdot G) = 0,$$

$$(D_x^2 - D_t^2)(F \cdot F - G \cdot G) = 0$$

提示：证明$(F^2-G^2)\{(D_x^2-D_t^2-1)(F\cdot G)\}-2FG\{(D_x^2-D_t^2)(F\cdot F-G\cdot G)\}=0$

*8.19 利用8.15题求KP方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的下列形式的双孤立子解

$$v=1+v_1+v_2+Av_1v_2$$

其中

$$v_1=e^{\theta_1},\ \theta_1=k_1x+l_1y-\omega_1t-\delta_1,\ \omega_1=k_1^3+3l_1^2/k_1$$

$$v_2=e^{\theta_2},\ \theta_2=k_2x+l_2y-\omega_2t-\delta_2,\ \omega_2=k_2^3+3l_2^2/k_2$$

A适当选择.

提示：$A=\dfrac{(k_1-k_2)(\omega_2-\omega_1)+(k_1-k_2)^4+3(l_1-l_2)^2}{(k_1+k_2)(\omega_2+\omega_1)-(k_1+k_2)^4-3(l_1+l_2)^2}$.

第 9 章　散射反演法

本章主要介绍利用量子力学中的散射反演法(inverse scattering method)去求解非线性演化方程的初值问题. 散射反演法最初用来求解 KdV 方程初值问题中获得了成功,后来人们把它扩展去解其他非线性方程的初值问题就形成了 Lax 理论和 AKNS (Ablowitz,Kaup,Newell 和 Segur)方法.

9.1　GGKM(Gardner-Greene-Kruskal-Miura)变换

我们熟知的 KdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{9.1.1}$$

在 $\beta>0$ 时可作变换

$$x'=\beta^{-1/3}x,\quad u'=-\frac{1}{6}\beta^{-1/3}u \tag{9.1.2}$$

化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{9.1.3}$$

其中 x' 和 u' 又分别写成了 x 和 u. 在第 6 章和第 8 章我们已分析过这个方程. 方程(9.1.1)中如 $\beta<0$,可使 u 和 x 同时改变符号,使它化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\quad(\beta_1=-\beta>0) \tag{9.1.4}$$

然后再作变换 $x'=\beta_1^{-1/3}x$, $u'=-\dfrac{1}{6}\beta_1^{-1/3}u$,即可化为方程(9.1.3).(见习题 6.1)

类似，我们熟知的 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{9.1.5}$$

在 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 时可作变换

$$x' = \beta^{-1/3} x, \quad u' = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \beta^{-1/6} u \tag{9.1.6}$$

化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{9.1.7}$$

其中 x' 和 u' 又分别写成了 x 和 u. 方程(9.1.5)在 $\alpha<0$ 和 $\beta>0$ 时可作变换

$$x' = \beta^{-1/3} x, \quad v = \pm \sqrt{\frac{-\alpha}{6}} \beta^{-1/6} u \tag{9.1.8}$$

化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{9.1.9}$$

其中 x' 又记成了 x.(见习题 6.4)

非常有趣的是：对于 KdV 方程(9.1.3)，它在下列 Galilean 变换

$$x' = x + 6\lambda t, \quad t' = t, \quad u' = u - \lambda \quad (\lambda = \text{常数}) \tag{9.1.10}$$

下形式保持不变.

同样有意思的是：对于 KdV 方程(9.1.3)若作 Miura 变换

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \tag{9.1.11}$$

则化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - 6v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{9.1.12}$$

因而 v 满足 mKdV 方程(9.1.9).(见习题 6.13)

受 Galilean 变换和 Miura 变换的启发，Gardner，Greene，

Kruskal 和 Miura 对 KdV 方程(9.1.3)作变换

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 + \lambda(t), \quad v = \frac{\partial \ln\psi}{\partial x} \tag{9.1.13}$$

它称为 GGKM 变换. 这个变换也可以写为

$$u = \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda(t) \tag{9.1.14}$$

由此可知,GGKM 变换实际上化成了量子力学中定态波函数 ψ 满足的 Schrödinger 方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\lambda - u)\psi = 0 \tag{9.1.15}$$

而 KdV 方程中的未知函数 u 成了势能, $\lambda(t)$ 成了本征值.

所以,通过 GGKM 变换可以建立一个非线性演化方程(如 KdV 方程)和 Schrödinger 方程(9.1.15)之间的联系,而且可以通过散射反演法求出势能,此势能就是非线性演化方程的解. 不过,求解 Schrödinger 方程的本征值要求

$$\lim_{x\to\pm\infty} u = 0 \tag{9.1.16}$$

因此,通常由散射反演法求得的是某个非线性方程的孤立子解.

9.2 Schrödinger 方程势能的孤立子解

GGKM 变换使得人们通过 Schrödinger 方程的散射反演求非线性演化方程的孤立子解成为可能,而且事实上,Schrödinger 方程的势能就有孤立子解.

令 $\lambda=k^2$,则 Schrödinger 方程(9.1.15)写为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (k^2 - u)\psi = 0 \tag{9.2.1}$$

为了求得 u,Bargmann 假设方程(9.2.1)的解为

$$\psi = e^{ikx}F(k,x) \tag{9.2.2}$$

其中 $F(k,x)$ 是 k 的多项式. 由此可求得 u 的孤立子解,这种方法称为 Bargmann 势能方法.

(9.2.2)式代入方程(9.2.1)得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial F}{\partial x} - uF = 0 \tag{9.2.3}$$

下面我们设 F 为 k 的一次多项式和二次多项式可分别求得 u 的单孤立子解和双孤立子解.

1. 单孤立子解

设 $F(k,x)$为 k 的一次多项式,即令

$$F(k,x) = ia(x) + 2k \tag{9.2.4}$$

其中 $a(x)$为待定函数,$i \equiv \sqrt{-1}$.

(9.2.4)式代入方程(9.2.3)有

$$i\left(\frac{d^2 a}{dx^2} - au\right) - 2k\left(\frac{da}{dx} + u\right) = 0 \tag{9.2.5}$$

因而

$$\frac{d^2 a}{dx^2} = au, \quad \frac{da}{dx} = -u \tag{9.2.6}$$

这是确定 $a(x)$和 $u(x)$的两个方程.(9.2.6)的两个方程消去 u 得到

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + a\frac{da}{dx} = 0 \tag{9.2.7}$$

上式对 x 积分一次得到

$$\frac{da}{dx} + \frac{1}{2}a^2 = 2k^2 \tag{9.2.8}$$

其中 $2k^2$ 为积分常数.方程(9.2.8)是 Riccati 方程,形式与方程(2.2.39)完全相同,因而,它的解为

$$a = 2k\tanh(kx - \delta) \tag{9.2.9}$$

可见(2.2.43)式,这里 δ 为常数.

(9.2.9)式代入(9.2.6)的第二个方程求得

$$u = -\frac{da}{dx} = -2k^2\mathrm{sech}^2(kx - \delta) \tag{9.2.10}$$

这就是势能的单孤立子形式解.

2. 双孤立子解

设 $F(k,x)$ 是 k 的二次多项式，即

$$F(k,x)=b(x)+2\mathrm{i}ka(x)+4k^2 \tag{9.2.11}$$

其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为待定函数，$\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$.

(9.2.11)式代入方程(9.2.3)有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}x^2}-bu\right)+2\mathrm{i}k\left(\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}-au\right)-4k^2\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}+u\right)=0 \tag{9.2.12}$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}x^2}-bu=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}-au=0,\quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}=-u \tag{9.2.13}$$

这是确定 $a(x)$，$b(x)$ 和 $u(x)$ 的三个方程. (9.2.13)的头两个方程消去 u，后两个方程消去 u，分别得

$$\begin{cases}b\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(b\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}-a\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}x^2}+a\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}=0\end{cases} \tag{9.2.14}$$

(9.2.14)的两式分别对 x 积分有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}b^2+b\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}-a\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}=2k_2^4\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{2}a^2+b=2k_1^2\end{cases} \tag{9.2.15}$$

其中 $2k_2^4$ 和 $2k_1^2$ 为积分常数. 若令

$$a=\frac{2}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \tag{9.2.16}$$

代入(9.2.15)的第二个方程有

$$b=2\left(k_1^2-\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right) \tag{9.2.17}$$

(9.2.16)式和(9.2.17)式代入(9.2.15)的第一个方程，得到

$$2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} - \left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - 2k_1^2\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + (k_1^4 - k_2^4)w^2 = 0 \tag{9.2.18}$$

上式两边对 x 微商，消去因子 $2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$，得到下列 w 的四阶线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4} - 2k_1^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} + (k_1^4 - k_2^4)w = 0 \tag{9.2.19}$$

它的通解为

$$w = C_1\mathrm{e}^{\mu_1 x} + C_2\mathrm{e}^{-\mu_1 x} + C_3\mathrm{e}^{\mu_2 x} + C_4\mathrm{e}^{-\mu_2 x} \tag{9.2.20}$$

其中 C_1，C_2，C_3 和 C_4 为任意常数，而

$$\mu_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},\quad \mu_2 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \tag{9.2.21}$$

(9.2.20)式代入方程(9.2.18)，不难得到

$$C_1C_2\mu_1^2 = C_3C_4\mu_2^2 \tag{9.2.22}$$

这样可令

$$C_1 = \mu_2\alpha,\quad C_2 = \frac{\mu_2}{\alpha},\quad C_3 = \mu_1\beta,\quad C_4 = \frac{\mu_1}{\beta} \tag{9.2.23}$$

其中 α 和 β 为任意非零常数，将(9.2.23)式代入(9.2.20)式，得到

$$\begin{aligned} w &= \mu_2(\alpha\mathrm{e}^{\mu_1 x} + \alpha^{-1}\mathrm{e}^{-\mu_1 x}) + \mu_1(\beta\mathrm{e}^{\mu_2 x} + \beta^{-1}\mathrm{e}^{-\mu_2 x}) \\ &= 2\mu_2\cosh(\mu_1 x - \theta_1) + 2\mu_1\cosh(\mu_2 x - \theta_2) \end{aligned} \tag{9.2.24}$$

其中

$$\mathrm{e}^{-\theta_1} = \alpha,\quad \mathrm{e}^{-\theta_2} = \beta \tag{9.2.25}$$

(9.2.24)式代入(9.2.16)式求得

$$a = 2\mu_1\mu_2\cdot\frac{\sinh(\mu_1 x - \theta_1) + \sinh(\mu_2 x - \theta_2)}{\mu_2\cosh(\mu_1 x - \theta_1) + \mu_1\cosh(\mu_2 x - \theta_2)} \tag{9.2.26}$$

(9.2.26)式代入(9.2.13)的第三式，得到

$$\begin{aligned} u = -2\mu_1\mu_2\cdot\Bigg\{&\frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2)\cosh(\mu_1 x - \theta_1)\cosh(\mu_2 x - \theta_2)}{[\mu_2\cosh(\mu_1 x - \theta_1) + \mu_1\cosh(\mu_2 x - \theta_2)]^2} \\ &+ \frac{2\mu_1\mu_2[1 - \sinh(\mu_1 x - \theta_1)\sinh(\mu_2 x - \theta_2)]}{[\mu_2\cosh(\mu_1 x - \theta_1) + \mu_1\cosh(\mu_2 x - \theta_2)]^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{9.2.27}$$

若令

$$\mu_1 = p + q, \quad \mu_2 = p - q, \quad \theta_1 = \gamma + \delta, \quad \theta_2 = \gamma - \delta \tag{9.2.28}$$

则(9.2.26)式和(9.2.28)式分别化为

$$a = 2(p^2 - q^2)\frac{1}{p\coth(px - \gamma) - q\tanh(qx - \delta)} \tag{9.2.29}$$

$$u = -2(p^2 - q^2)\cdot\frac{p^2\operatorname{csch}^2(px - \gamma) + q^2\operatorname{sech}^2(qx - \delta)}{[p\coth(px - \gamma) - q\tanh(qx - \delta)]^2} \tag{9.2.30}$$

(9.2.30)式表征 Schrödinger 方程势能的双孤立子解，其形式与(8.4.40)式相似. 而且若取 $p=2, q=1(\mu_1=3, \mu_2=1), \gamma=\delta=0(\theta_1=\theta_2=0)$，则有

$$u = -6\operatorname{sech}^2 x \tag{9.2.31}$$

它就是(8.4.51)式.

9.3 散射反演法

本章前两节，我们指出了某个非线性演化方程与 Schrödinger 方程联系的可能性. 本节将具体说明如何用散射反演法去求解下列 KdV 方程的初值问题.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \tag{9.3.1}$$

其中 $u_0(x)$为已知函数，且任何时刻 u 都满足(9.1.16)式. 具体求解问题(9.3.1)分为三步.

1. 以 $u_0(x)$为势能，解下列 Schrödinger 方程的本征值问题，求出与 $u_0(x)$相应的 λ(记为 λ_0)和 ψ(记为 ψ_0)，即求解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + (\lambda_0 - u_0)\psi_0 = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \\
\psi_0 \Big|_{x \to \pm\infty} = 0
\end{cases}
\tag{9.3.2}
$$

根据量子力学的分析，上述问题的本征值包含离散谱（束缚态）和连续谱（非束缚态），对应的 λ_0，前者为负，后者为正. 即对束缚态有

$$
\lambda_0 = -k_n^2 \quad (k_n > 0, n = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.3.3}
$$

相应的本征函数有下列渐近式：

$$
\begin{cases}
\psi_0 \sim c_n(0)\mathrm{e}^{k_n x} & (x \to -\infty) \\
\psi_0 \sim c_n(0)\mathrm{e}^{-k_n x} & (x \to +\infty)
\end{cases}
\tag{9.3.4}
$$

其中 $c_n(0)$ 为常数. 且要求 ψ_0 满足正交归一化条件：

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{9.3.5}
$$

而对非束缚态有

$$
\lambda_0 = k^2 \tag{9.3.6}
$$

这时的本征函数与波的传输方式有关. 通常，设 t 时刻有一振幅为 1 的定常平面波 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 从 $x=+\infty$ 进入，遇到势能后，一部分以 $a(k,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 进入 $x=-\infty$，另一部分以 $b(k,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 被反射回 $x=+\infty$. $a(k,0)$ 和 $b(k,0)$ 分别称为透明系数和反射系数，满足

$$
|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{9.3.7}
$$

这时本征函数的渐近式为

$$
\begin{cases}
\psi_0 \sim a(k,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & (x \to -\infty) \\
\psi_0 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b(k,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & (x \to +\infty)
\end{cases}
\tag{9.3.8}
$$

在上面诸式中 λ_0、$c_n(0)$、$a(k,0)$、$b(k,0)$ 统一称为初始时刻的散射量. 实际上对任意时刻 t，(9.3.2)式到(9.3.8)式均成立，只是波函数 ψ_0 改为 ψ，相应的散射量由 λ_0、$c_n(0)$、$a(k,0)$、$b(k,0)$ 分别改为 $\lambda(t)$、$c_n(k_n,t)$、$a(k,t)$、$b(k,t)$.

2. 以 GGKM 变换(9.1.14)代入 KdV 方程，确定散射量的演变规律. 这些规律是

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9.3.9}$$

$$c_n(k_n, t) = c_n(0)\mathrm{e}^{4k_n^3 t} \tag{9.3.10}$$

$$a(k, t) = a(k, 0) \tag{9.3.11}$$

$$b(k, t) = b(k, 0)\mathrm{e}^{8ik^3 t} \tag{9.3.12}$$

而波函数 ψ 的演变规律为

$$Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(\lambda + u)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (\text{离散谱}) \tag{9.3.13}$$

$$Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(\lambda + u)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4\mathrm{i}k^3\psi \qquad (\text{连续谱}) \tag{9.3.14}$$

下面我们依次说明.

以 ψ^2 去乘 KdV 方程((9.3.1)的第一式)得

$$\psi^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \psi^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{9.3.15}$$

但由 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (u - \lambda)\psi \\ \dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \psi \dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - \lambda)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \psi \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - \lambda)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \qquad\quad = \psi \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - \lambda)^2\psi \\ \dfrac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} = \psi \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4(u - \lambda)\psi\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - \lambda)^2\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{9.3.16}$$

可以得到

$$\psi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \psi^2 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \tag{9.3.17}$$

$$\psi^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial S}{\partial x} - S\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad (9.3.18)$$

其中

$$S \equiv \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{3}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.3.19)$$

这样,(9.3.15)式化为

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \quad (9.3.20)$$

其中

$$\begin{aligned} Q &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + S = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + 4\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial \psi}{\partial x} - 3\psi\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2(u+2\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.3.21)$$

将方程(9.3.20)两边对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分,注意 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ 在 $x \to \pm\infty$ 时都趋于零,而 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$ 有限,则得到(9.3.9)式.(9.3.9)式表明 λ 不随时间变化,相应 k_n 和 k 也不随时间变化.

(9.3.9)式代入方程(9.3.20),得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \quad (9.3.22)$$

但利用 Schrödinger 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \psi\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - Q\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Q(\lambda - u)\psi \quad (9.3.23)$$

因而

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + (\lambda - u)Q = 0 \quad (9.3.24)$$

即 Q 也满足 Schrödinger 方程.

方程(9.3.22)两边对 x 积分得到

$$\psi^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right) = D(t) \tag{9.3.25}$$

其中 $D(t)$为 t 的任意函数.(9.3.25)式除以 ψ^2,再对 x 积分得到

$$Q = D(t)\psi\int_0^x \frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x + E(t)\psi \tag{9.3.26}$$

其中 $E(t)$也是 t 的任意函数.

对于离散谱,由(9.3.4)式知,在 $x\to\pm\infty$时,ψ 是有界的,Q 也是有界的,但 $\int_0^x \frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x$ 却是无界的,因而只有 $D(t)=0$,(9.3.26)式化为

$$Q = E(t)\psi \tag{9.3.27}$$

方程(9.3.27)两边乘以 ψ,注意(9.3.21)式和 $u=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda$,则得

$$E(t)\psi^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - 3\lambda\psi^2\right] \tag{9.3.28}$$

上式两边对 x 从$-\infty$到$+\infty$积分,必然有 $E(t)=0$,则(9.3.27)式化为 $Q=0$,即得到(9.3.13)式.

根据(9.3.13)式,因 $x\to+\infty$时,$u\to 0$,$\psi\sim c_n(k_n,t)\mathrm{e}^{-k_n x}$,则得到

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t} = 4k_n^3 c_n \tag{9.3.29}$$

这个微分方程的解就是(9.3.10)式.

对于连续谱,因 $x\to-\infty$时,$u\to 0$,$\psi\sim a(k,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$,因而

$$\psi\int_0^x \frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x \sim \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\int_0^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,\quad Q\sim\left(\frac{\partial a}{\partial t}+4\mathrm{i}k^3 a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},$$

使得(9.3.26)式化为

$$\frac{\partial a}{\partial t} + [4\mathrm{i}k^3 - E(t)]a = \frac{D(t)}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{9.3.30}$$

上式左端只与 t 和 k 有关,而右端含有一个与 x 有关的项 $\int_0^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$,

因而(9.3.30)式成立也只有 $D(t)=0$,这样,(9.3.30)式化为

$$\frac{\partial a}{\partial t}+[4\mathrm{i}k^3-E(t)]a=0 \tag{9.3.31}$$

同样,对于连续谱,在 $x\to+\infty$ 时,$u\to0$,$\psi\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$,因而 $Q\sim\left(\frac{\partial b}{\partial t}-4\mathrm{i}k^3b\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+4\mathrm{i}k^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$,使得方程(9.3.26)(注意 $D(t)=0$)化为

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t}-4\mathrm{i}k^3b-E(t)b\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+[4\mathrm{i}k^3-E(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}=0 \tag{9.3.32}$$

由此得到

$$E(t)=4\mathrm{i}k^3 \tag{9.3.33}$$

且

$$\frac{\partial b}{\partial t}=8\mathrm{i}k^3b \tag{9.3.34}$$

$D(t)=0$ 和 $E(t)=4\mathrm{i}k^3$ 使得(9.3.26)式化为(9.3.14)式. 而方程(9.3.34)的解就是(9.3.12)式.

(9.3.33)式代入方程(9.3.31),得到

$$\frac{\partial a}{\partial t}=0 \tag{9.3.35}$$

它的解就是(9.3.11)式.

3. 利用 $\lambda(t)$ 和 ψ 求解 Schrödinger 方程的下列散射反演问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\lambda-u)\psi=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ \psi\Big|_{x\to+\infty}\to0\end{cases} \tag{9.3.36}$$

确定 KdV 方程初值问题(9.3.1)的解 u. 这个 u 为

$$u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t) \tag{9.3.37}$$

其中 $K(x,x,t)$ 是 GLM(Gelfand-Levitan-Marchenko)积分方程

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{+\infty}B(y+z,t)K(x,z,t)\mathrm{d}z$$
$$=0\quad(y>x)\tag{9.3.38}$$
的解. 而积分方程的核为
$$B(x,t)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}b(k,t)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x\tag{9.3.39}$$
它包含离散谱和连续谱的共同贡献.

下面证明(9.3.39)式、(9.3.38)式和(9.3.37)式. 首先, 令 $\lambda=k^2$, 把 Schrödinger 方程写为
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(k^2-u)\psi=0\quad(\text{离散谱时 }k=\mathrm{i}k_n)\tag{9.3.40}$$
其次, 设 Schrödinger 方程(9.3.40)的解为
$$\psi(x,t,k)=\mathrm{e}^{ikx}+\int_x^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}y\tag{9.3.41}$$
其中 $K(x,y,t)$ 是待定函数, 且规定 $y<x$ 时, $K(x,y,t)=0$. 由(9.3.41)式显然有
$$\psi(x,t,k)\sim\mathrm{e}^{ikx}\qquad(x\to+\infty)\tag{9.3.42}$$
$$\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\sim\mathrm{e}^{-k_n x}\quad(x\to+\infty)\tag{9.3.43}$$
因为 Schrödinger 方程(9.3.40)中的 k 换为 $-k$, 方程不变. 因而
$$\psi(x,t,-k)=\mathrm{e}^{-ikx}+\int_x^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{e}^{-iky}\mathrm{d}y\tag{9.3.44}$$
也必然是 Schrödinger 方程(9.3.40)的解, 而且有
$$\psi(x,t,-k)\sim\mathrm{e}^{-ikx}\quad(x\to+\infty)\tag{9.3.45}$$
$$\psi(x,t,-\mathrm{i}k_n)\sim\mathrm{e}^{k_n x}\quad(x\to+\infty)\tag{9.3.46}$$
下面我们说明 $\psi(x,t,k)$ 和 $\psi(x,t,-k)$ 是线性无关的. 因为它们都是方程(9.3.40)的解, 所以有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi(x,t,k)}{\partial x^2}+k^2\psi(x,t,k)=u\psi(x,t,k)\\[2ex]\dfrac{\partial^2\psi(x,t,-k)}{\partial x^2}+k^2\psi(x,t,-k)=u\psi(x,t,-k)\end{cases}\tag{9.3.47}$$

以 $\psi(x,t,-k)$乘(9.3.47)的第一式,以 $\psi(x,t,k)$乘(9.3.47)的第二式,然后相减有

$$\psi(x,t,-k)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t,k)-\psi(x,t,k)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t,-k)=0 \tag{9.3.48}$$

而 $\psi(x,t,k)$和 $\psi(x,t,-k)$的 Wronski 行列式为

$$\begin{aligned}&W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]\\&=\psi(x,t,k)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t,-k)-\psi(x,t,-k)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t,k)\end{aligned} \tag{9.3.49}$$

(9.3.49)式两边对 x 微商,并利用(9.3.48)式有

$$\frac{\partial}{\partial x}\{W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]\}=0 \tag{9.3.50}$$

它说明 $W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]$与 x 无关.但由(9.3.42)式和(9.3.45)式

$$\lim_{x\to+\infty}W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]=-2\mathrm{i}k\neq 0 \tag{9.3.51}$$

这样,我们论证了 $W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]\neq 0$,因而 $\psi(x,t,k)$和 $\psi(x,t,-k)$线性无关.正由于此,由 $\psi(x,t,k)$和 $\psi(x,t,-k)$线性组合构成的

$$\phi(x,t,k)=\alpha(k,t)\psi(x,t,-k)+\beta(k,t)\psi(x,t,k) \tag{9.3.52}$$

也必然是 Schrödinger 方程(9.3.40)的解.其中 $\alpha(k,t)$和 $\beta(k,t)$是 k,t 的任意函数.由(9.3.52)式有

$$\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}=\psi(x,t,-k)+\frac{\beta(k,t)}{\alpha(k,t)}\psi(x,t,k) \tag{9.3.53}$$

上式令 $x\to+\infty$,利用(9.3.42)式和(9.3.45)式有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\frac{\beta(k,t)}{\alpha(k,t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{9.3.54}$$

但(9.3.8)式对任意时刻 t 都成立.则(9.3.54)式与(9.3.8)的第二式比较有

$$b(k,t)=\frac{\beta(k,t)}{\alpha(k,t)} \tag{9.3.55}$$

这样，(9.3.53)式可改写为

$$\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}=\psi(x,t,-k)+b(k,t)\psi(x,t,k) \tag{9.3.56}$$

下面，我们设法确定 $K(x,y,t)$满足的方程，即证明(9.3.38)式. 首先，因 $y<x$，$K(x,y,t)=0$，则在(9.3.41)式中

$$\int_x^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}y,$$

则由(9.3.41)式，可以认为 $K(x,y,t)$是函数 $\psi(x,t,k)-\mathrm{e}^{ikx}$的 Fourier 逆变换，即

$$K(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(x,t,k)-\mathrm{e}^{ikx}]\mathrm{e}^{-iky}\mathrm{d}k \tag{9.3.57}$$

其次，将(9.3.56)式两边乘以 e^{iky}，且对 k 从$-\infty$到$+\infty$积分有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,t,-k)\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}k$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}b(k,t)\psi(x,t,k)\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}k \tag{9.3.58}$$

将(9.3.41)式和(9.3.44)式代入方程(9.3.58)，并注意

$$\begin{cases}\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k,\\[2ex]\delta(x-y)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ik(x-y)}\mathrm{d}k=0\quad(x\neq y)\\[2ex]\displaystyle\int_x^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ik(y-z)}\mathrm{d}k\right)K(x,z,t)\mathrm{d}z=\int_x^{+\infty}2\pi\delta(y-z)K(x,z,t)\mathrm{d}z\\\qquad=2\pi K(x,y,t)\end{cases} \tag{9.3.59}$$

则得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}\mathrm{e}^{iky}\mathrm{d}k=2\pi K(x,y,t)+2\pi B_c(x+y,t)$$
$$+2\pi\int_x^{+\infty}K(x,z,t)B_c(y+z,t)\mathrm{d}z\quad(y>x) \tag{9.3.60}$$

其中

$$B_c(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}b(k,t)e^{iky}dk \qquad (9.3.61)$$

下面，我们计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}e^{iky}dk$. 根据留数定理，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}e^{-iky}dk=2\pi i\sum_{n=1}^{N}a_{-1}^{(n)} \qquad (9.3.62)$$

其中 $a_{-1}^{(n)}$ 是函数 $\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}e^{iky}$ 在极点（即 $\alpha(k,t)$ 的零点）处的留数. 下面，我们说明 $\alpha(k,t)$ 的零点就是离散的本征值 ik_n，而且它是一阶零点.

将(9.3.56)式两边对 x 微商有

$$\frac{1}{\alpha(k,t)}\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial x}-b(k,t)\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(x,t,-k)}{\partial x} \qquad (9.3.63)$$

再与(9.3.56)式联立消去 $b(k,t)$，得到

$$\frac{1}{\alpha(k,t)}=-\frac{W[\psi(x,t,k),\psi(x,t,-k)]}{W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)]} \qquad (9.3.64)$$

上式左边与 x 无关，右边的分子据(9.3.50)式也与 x 无关，因而 $W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)]$ 也与 x 无关. 而且由(9.3.51)式，(9.3.64)式化为

$$\frac{1}{\alpha(k,t)}=\frac{2ik}{W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)]} \qquad (9.3.65)$$

由此可见，$\alpha(k,t)$ 与 $W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)]$ 有相同的零点. 这样，我们可根据

$$W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)]=0 \qquad (9.3.66)$$

求出 $\alpha(k,t)$ 的零点. 由(9.3.66)式知 $\phi(x,t,k)$ 与 $\psi(x,t,k)$ 线性相关，即

$$\phi(x,t,k)=c(k,t)\psi(x,t,k) \qquad (9.3.67)$$

上式取 $k=ik_n$ 有

$$\phi(x,t,ik_n)=c(ik_n,t)\psi(x,t,ik_n) \qquad (9.3.68)$$

但由(9.3.43)式有

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x,t,ik_n) = c(ik_n,t)e^{-k_n x} \tag{9.3.69}$$

但(9.3.4)式对任意时刻 t 均成立，则比较(9.3.69)式和(9.3.4)的第二式有

$$c(ik_n,t) = c_n(t) \tag{9.3.70}$$

因而，(9.3.68)式可改写为

$$\phi(x,t,ik_n) = c_n(t)\psi(x,t,ik_n) \tag{9.3.71}$$

且由(9.3.43)式有

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x,t,ik_n) = c_n(t)e^{-k_n x} \tag{9.3.72}$$

而取 $k=ik_n$ 时，(9.3.52)式化为

$$\phi(x,t,ik_n) = \alpha(ik_n,t)\psi(x,t,-ik_n) + \beta(ik_n,t)\psi(x,t,ik_n) \tag{9.3.73}$$

但由(9.3.43)式和(9.3.46)式有

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x,t,ik_n) = \alpha(ik_n,t)e^{k_n x} + \beta(ik_n,t)e^{-k_n x} \tag{9.3.74}$$

比较(9.3.72)式和(9.3.74)式，得到

$$\alpha(ik_n,t) = 0, \quad \beta(ik_n,t) = c_n(t) \tag{9.3.75}$$

这就说明了 ik_n 就是 $\alpha(k,t)$ 关于 k 的零点. 下面还要说明 ik_n 是 $\alpha(k,t)$ 关于 k 的一阶零点.

由(9.3.65)式，我们有

$$2ik\alpha(k,t) = W[\phi(x,t,k),\psi(x,t,k)] \tag{9.3.76}$$

上式两边对 k 微商，得到

$$2ik\frac{\partial\alpha}{\partial k} + 2i\alpha(k,t) = W\left[\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k},\psi(x,t,k)\right] + W\left[\phi(x,t,k),\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right] \tag{9.3.77}$$

取 $k=ik_n$，(9.3.77)式化为

$$-2k_n\left(\frac{\partial\alpha}{\partial k}\right)_{k=ik_n} = W\left[\left(\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=ik_n},\psi(x,t,ik_n)\right] + W\left[\phi(x,t,ik_n),\left(\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=ik_n}\right] \tag{9.3.78}$$

但 $\psi(x,t,k)$和 $\phi(x,t,k)$均满足 Schrödinger 方程(9.3.40),即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi(x,t,k)}{\partial x^2}+k^2\psi(x,t,k)=u\psi(x,t,k)\\[2ex]\dfrac{\partial^2\phi(x,t,k)}{\partial x^2}+k^2\phi(x,t,k)=u\phi(x,t,k)\end{cases}\tag{9.3.79}$$

上式的两个方程分别对 k 微商,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\dfrac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right]+k^2\dfrac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}=u\dfrac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}-2k\psi(x,t,k)\\[2ex]\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\dfrac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}\right]+k^2\dfrac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}=u\dfrac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}-2k\phi(x,t,k)\end{cases}\tag{9.3.80}$$

以$\dfrac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}$乘(9.3.80)的第一式,以 $\psi(x,t,k)$乘(9.3.80)的第二式,然后相减得到

$$\frac{\partial}{\partial x}W\left[\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k},\psi(x,t,k)\right]=2k\phi(x,t,k)\psi(x,t,k)\tag{9.3.81}$$

类似,以$\dfrac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}$乘(9.3.80)的第二式,以 $\phi(x,t,k)$乘(9.3.80)的第一式,然后相减得到

$$-\frac{\partial}{\partial x}W\left[\phi(x,t,k),\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right]=2k\phi(x,t,k)\psi(x,t,k)\tag{9.3.82}$$

将(9.3.81)式对 x 从 $-\infty$到 x 积分,将(9.3.82)式对 x 从 x 到 $+\infty$积分,分别得到

$$2k\int_{-\infty}^{x}\phi(x,t,k)\psi(x,t,k)\mathrm{d}x=W\left[\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k},\psi(x,t,k)\right]_{-\infty}^{x}\tag{9.3.83}$$

$$2k\int_{x}^{+\infty}\phi(x,t,k)\psi(x,t,k)\mathrm{d}x=-W\left[\phi(x,t,k),\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right]_{x}^{+\infty}\tag{9.3.84}$$

将(9.3.83)式与(9.3.84)相加，并以 $k=\mathrm{i}k_n$ 代入，注意 $\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)$ 和 $\phi(x,t,\mathrm{i}k_n)$和它们对 k 的微商都在$|x|\to+\infty$时，以 $\mathrm{e}^{-k_n x}$ 的方式趋于零，则得

$$2\mathrm{i}k_n\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,t,\mathrm{i}k_n)\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{d}x = W\left[\left(\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n},\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\right]$$

$$+ W\left[\phi(x,t,\mathrm{i}k_n),\left(\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n}\right] \tag{9.3.85}$$

利用(9.3.71)式，并注意 $\phi(x,t,\mathrm{i}k_n)$满足 $\lambda=-k_n^2$ 的 Schrödinger 方程，则要求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^2(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{d}x=1$ 就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^2(x,t,\mathrm{i}k_n)\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{c_n} \tag{9.3.86}$$

这样，(9.3.85)式就化为

$$\frac{2\mathrm{i}k_n}{c_n} = W\left[\left(\frac{\partial\phi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n},\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\right]$$

$$+ W\left[\phi(x,t,\mathrm{i}k_n),\left(\frac{\partial\psi(x,t,k)}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n}\right] \tag{9.3.87}$$

(9.3.87)式代入(9.3.78)式，得到

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n} = -\frac{\mathrm{i}}{c_n}\neq 0 \tag{9.3.88}$$

由此可见，$k=\mathrm{i}k_n$ 是 $\alpha(k,t)$关于 k 的一阶零点. 这样，在(9.3.62)式中

$$a_{-1}^{(n)} = \frac{\phi(x,t,\mathrm{i}k_n)}{\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial k}\right)_{k=\mathrm{i}k_n}}\mathrm{e}^{-k_n y} = \mathrm{i}c_n^2\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{e}^{-k_n y} \tag{9.3.89}$$

所以，(9.3.62)式化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x,t,k)}{\alpha(k,t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}k = -2\pi\sum_{n=1}^{N}c_n^2\psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{e}^{-k_n y} \tag{9.3.90}$$

将(9.3.90)式代入(9.3.60)式，得到

$$
-\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \psi(x,t,\mathrm{i}k_n)\mathrm{e}^{-k_n y} = K(x,y,t) + B_c(x+y,t)
$$

$$
+\int_{y}^{+\infty} K(x,z,t)B_c(y+z,t)\mathrm{d}z \quad (y > x) \quad (9.3.91)
$$

在(9.3.41)式中取 $k=\mathrm{i}k_n$，并代入(9.3.91)式的左端，再稍作整理后，即得到确定 $K(x,y,t)$ 的 GLM 积分方程(9.3.38)，其中的 $B(x,t)$ 即为(9.3.39)式.

剩下便是证明(9.3.37)式. 首先要说明的是根据 Fourier 变换的性质要求

$$
y \to +\infty \text{ 时}, \quad K(x,y,t) \to 0, \frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y} \to 0 \quad (9.3.92)
$$

其次，将(9.3.41)式两边对 x 微商有

$$
\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - K(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \int_{x}^{+\infty} \frac{\partial K(x,y,t)}{\partial x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y \quad (9.3.93)
$$

上式对 x 再微商有

$$
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{i}kK(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{\partial K(x,x,t)}{\partial x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}
$$

$$
-\left[\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial x}\right]_{y=x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \int_{x}^{+\infty} \frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y \quad (9.3.94)
$$

同时，将(9.3.41)式中的积分分部积分一次，并利用(9.3.92)式有

$$
\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{1}{\mathrm{i}k}\int_{x}^{+\infty} \frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y \quad (9.3.95)
$$

上式中的积分再分部积分一次，也利用(9.3.92)式有

$$
\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{1}{k^2}\left[\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y}\right]_{y=x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}
$$

$$
-\frac{1}{k^2}\int_{x}^{+\infty} \frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial y^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y \quad (9.3.96)
$$

由(9.3.94)式和(9.3.96)式有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k^2\psi=-\frac{\partial K(x,x,t)}{\partial x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\left[\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y}\right]_{y=x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

$$+\int_x^{+\infty}\left[\frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial y^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y \quad (9.3.97)$$

注意,对于复合函数 $K[x,y(x),t]$有

$$\frac{\partial K(x,x,t)}{\partial x}=\left[\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{y=x}$$

$$=\left[\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial y}\right]_{y=x} \quad (9.3.98)$$

这样,将方程(9.3.97)与方程(9.3.40)比较有

$$\left[-2\frac{\partial K(x,x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\int_x^{+\infty}\left[\frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial y^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y$$

$$=u\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\int_x^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\right] \quad (9.3.99)$$

比较上式两边 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$的系数,得到

$$\begin{cases}-2\dfrac{\partial K(x,x,t)}{\partial x}=u\\[2ex]\dfrac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 K(x,y,t)}{\partial y^2}=uK(x,y,t)\end{cases} \quad (9.3.100)$$

其中的第一式即是(9.3.37)式.

上面论述的应用散射反演法求解KdV方程初值问题的三步与用积分变换法求解线性偏微分方程是十分相似的.第一步根据 $u_0(x)$求 λ_0 和 ψ_0 相当于对偏微分方程求Fourier变换,使 u 变为 $\tilde{u}=F[u]$;其第二步求散射量和 ψ 的演变规律相当于求解 $\tilde{u}$ 的常微分方程;其第三步由 λ 和 ψ 散射反演求 u 相当于作Fourier逆变换,使 $\tilde{u}$ 变回 u.

下面,我们用散射反演法求KdV方程的孤立子解.研究表明,纯粹的孤立子解经常是无反射势能的状态,即 $b=0$.此时,(9.3.39)式简化为

$$B(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n x} \tag{9.3.101}$$

它说明此时在(9.3.39)式中仅有离散谱的贡献.

9.4 KdV 方程的单孤立子解

在 6.3 节中,我们应用求行波解的方法求得了 KdV 方程的单孤立子解;在 8.4 节中,我们又应用特殊变换法求得了 KdV 方程的单孤立解和双孤立子解.这里,我们用散射反演法求 KdV 方程的单孤立子解,下一节求双孤立子解.

考虑方程(8.4.41)和(8.4.52)式,这里用散射反演法就是解下列 KdV 方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u\Big|_{t=0} = -2\mathrm{sech}^2 x & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \tag{9.4.1}$$

显然 $x \to \pm\infty$ 时,$u\Big|_{t=0} \to 0$.

1. 解下列 Schrödinger 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mathrm{sech}^2 x)\psi_0 = 0 & (-\infty < x < +\infty) \\ \psi_0\Big|_{x\to\pm\infty} = 0 \end{cases} \tag{9.4.2}$$

对于离散谱,$\lambda = -k_n^2 < 0$,经过变换

$$\eta = \tanh x \tag{9.4.3}$$

问题(9.4.2)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \eta}\Big[(1-\eta^2)\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \eta}\Big] + \Big(2 - \dfrac{k_n^2}{1-\eta^2}\Big)\psi_0 = 0 \\ \psi_0\big|_{\eta=\pm1} \to 0 \end{cases} \tag{9.4.4}$$

这是连带 Legendre 方程的本征值问题，其本征值和本征函数分别为

$$\begin{cases} l(l+1) = 2 \Rightarrow l = 1 \\ \psi_0 = A\mathrm{P}_l^{k_n}(\eta) = A\mathrm{P}_1^{k_n}(\eta) \end{cases} \tag{9.4.5}$$

但 $k_n \neq 0$，要求 $\mathrm{P}_1^{k_n}(\eta) \neq 0$，只有 $k_n = k_1 = 1 (n=1)$，则

$$\psi_0 = A\mathrm{P}_1^1(\eta) = A\sqrt{1-\eta^2} = A\mathrm{sech}x \tag{9.4.6}$$

其中 A 为任意常数. 且由(9.4.6)式有

$$\psi_0 \sim 2A\mathrm{e}^{-x} \quad (x \to +\infty) \tag{9.4.7}$$

与(9.3.4)式比较有

$$c_1(0) = 2A \tag{9.4.8}$$

A 可以由正交归一化条件(9.3.5)得到

$$A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2 x\mathrm{d}x = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\eta = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9.4.9}$$

因而 $c_1(0) = \sqrt{2}$，

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech}x, \quad \psi_0 \sim \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \quad (x \to +\infty) \tag{9.4.10}$$

对于连续谱，因平面波无反射，则

$$a(k,0) = 1, \quad b(k,0) = 0 \tag{9.4.11}$$

2. 由(9.3.10)式、(9.3.11)式和(9.3.12)式有

$$c_1(k_1,t) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{4t}, \quad a(k,t) = 1, \quad b(k,t) = 0 \tag{9.4.12}$$

3. 由(9.3.39)式求得

$$B(x,t) = c_1^2(k_1,t)\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-(x-8t)} \tag{9.4.13}$$

而 GLM 积分方程(9.3.38)化为

$$K(x,y,t) + 2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-(x-8t)} + 2\mathrm{e}^{-(y-8t)}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-z}K(x,z,t)\mathrm{d}z = 0 \tag{9.4.14}$$

为了求解积分方程(9.4.14)，我们设

$$K(x,y,t) = I(x,t)\mathrm{e}^{-y} \tag{9.4.15}$$

代入方程(9.4.14)求得

$$I(x,t) = -e^{4t}\operatorname{sech}(x-4t) \tag{9.4.16}$$

因而

$$K(x,y,t) = -e^{-(y-4t)}\operatorname{sech}(x-4t) \tag{9.4.17}$$

最后由(9.3.37)式求得问题(9.4.1)的解为

$$u = -2\operatorname{sech}^2(x-4t) \tag{9.4.18}$$

这就是 KdV 方程的单孤立子解. 它就是(8.4.45)式中 $k=1$ 的情况.

9.5 KdV 方程的双孤立子解

考虑方程(8.4.41)和(8.4.51)式, 这里即解下列初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \\ u\Big|_{t=0} = -6\operatorname{sech}^2 x \end{cases} \tag{9.5.1}$$

由于初条件是双孤立子的初条件, 因而由问题(9.5.1)求得的应是 KdV 方程的双孤立子解.

1. 求解下列 Schrödinger 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + (\lambda + 6\operatorname{sech}^2 x)\psi_0 = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \\ \psi_0\Big|_{x\to\pm\infty} = 0 \end{cases} \tag{9.5.2}$$

对于离散谱, $\lambda = -k_n^2 < 0$, 同样作(9.4.3)式的变换, 则问题(9.5.2)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \eta}\right] + \left(6 - \dfrac{k_n^2}{1-\eta^2}\right)\psi_0 = 0 \\ \psi_0\Big|_{\eta=\pm 1} = 0 \end{cases} \tag{9.5.3}$$

这也是连带 Legendre 方程的本征值问题. 因而

$$\begin{cases} l(l+1) = 6 \Rightarrow l = 2 \\ \psi_0 = AP_2^{k_n}(\eta) \quad (k_n \leqslant 2, \text{即 } k_1 = 1, k_2 = 2) \end{cases} \tag{9.5.4}$$

则

$$\begin{cases}\psi_0^{(1)} = A_1 \mathrm{P}_2^1(\eta) = A_1 \cdot 3\eta\sqrt{1-\eta^2} = 3A_1 \tanh x \operatorname{sech} x \\ \psi_0^{(2)} = A_2 \mathrm{P}_2^2(\eta) = A_2 \cdot 3(1-\eta^2) = 3A_2 \operatorname{sech}^2 x\end{cases} \tag{9.5.5}$$

相应

$$\begin{cases}\psi_0^{(1)} \sim 6A_1 \mathrm{e}^{-x} = c_1(0)\mathrm{e}^{-x} & (x \to +\infty) \\ \psi_0^{(2)} \sim 12A_2 \mathrm{e}^{-2x} = c_2(0)\mathrm{e}^{-2x} & (x \to +\infty)\end{cases} \tag{9.5.6}$$

与(9.3.4)式比较有

$$c_1(0) = 6A_1, \quad c_2(0) = 12A_2 \tag{9.5.7}$$

再利用正交归一化条件(9.3.5),定得

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (c_1(0) = \sqrt{6}), \quad A_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (c_2(0) = 2\sqrt{3}) \tag{9.5.8}$$

所以

$$\begin{cases}\psi_0^{(1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tanh x \cdot \operatorname{sech} x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\sinh x \cdot \operatorname{sech}^2 x \\ \psi_0^{(2)} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\operatorname{sech}^2 x\end{cases} \tag{9.5.9}$$

对于连续谱,因平面波无反射,则

$$a(k,0) = 1, \quad b(k,0) = 0 \tag{9.5.10}$$

2. 由(9.3.10)式、(9.3.11)式和(9.3.12)式有

$$\begin{cases}c_1(k_1,t) = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{4t}, \quad c_2(k_2,t) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{32t} \\ a(k,t) = 1, \quad b(k,t) = 0\end{cases} \tag{9.5.11}$$

3. 由(9.3.39)式求得

$$B(x,t) = c_1^2(k_1,t)\mathrm{e}^{-k_1 x} + c_2^2(k_2,t)\mathrm{e}^{-k_2 x} = 6\mathrm{e}^{-(x-8t)} + 12\mathrm{e}^{-2(x-32t)} \tag{9.5.12}$$

而 GLM 积分方程(9.3.38)化为

$$K(x,y,t) + 6\mathrm{e}^{-(x+y-8t)} + 12\mathrm{e}^{-2(x+y-32t)} + \int_x^{+\infty}\left[6\mathrm{e}^{-(y+z-8t)} + 12\mathrm{e}^{-2(y+z-32t)}\right]K(x,z,t)\mathrm{d}z = 0 \tag{9.5.13}$$

设

$$K(x,y,t)=I_1(x,t)\mathrm{e}^{-y}+I_2(x,t)\mathrm{e}^{-2y} \tag{9.5.14}$$

代入方程(9.5.13)求得

$$\begin{cases}[1+3\mathrm{e}^{-2(x-4t)}]I_1+2\mathrm{e}^{-(3x-8t)}I_2=-6\mathrm{e}^{-(x-8t)}\\ 4\mathrm{e}^{-(3x-64t)}I_1+[1+3\mathrm{e}^{-4(x-16t)}]I_2=-12\mathrm{e}^{-2(x-32t)}\end{cases} \tag{9.5.15}$$

(9.5.15)的两式分别乘以 e^{-x}和 e^{-2x},并引入

$$\xi_1=x-4t,\quad \xi_2=x-16t \tag{9.5.16}$$

$$J_1(x,t)=\mathrm{e}^{-x}I_1(x,t),\quad J_2(x,t)=\mathrm{e}^{-2x}I_2(x,t) \tag{9.5.17}$$

则(9.5.15)式化为

$$\begin{cases}(1+3\mathrm{e}^{-2\xi_1})J_1+2\mathrm{e}^{-2\xi_1}J_2=-6\mathrm{e}^{-2\xi_1}\\ 4\mathrm{e}^{-4\xi_2}J_1+(1+3\mathrm{e}^{-4\xi_2})J_2=-12\mathrm{e}^{-4\xi_2}\end{cases} \tag{9.5.18}$$

由此求得

$$J_1(x,t)=\frac{D_1}{D},\quad J_2(x,t)=\frac{D_2}{D} \tag{9.5.19}$$

其中

$$\begin{cases}D_1=-6\mathrm{e}^{-2\xi_1}(1-\mathrm{e}^{-4\xi_2}),\quad D_2=-12\mathrm{e}^{-4\xi_2}(1+\mathrm{e}^{-2\xi_1})\\ D=1+3\mathrm{e}^{-2\xi_1}+3\mathrm{e}^{-4\xi_2}+\mathrm{e}^{-2\xi_1-4\xi_2}\end{cases} \tag{9.5.20}$$

因而

$$K(x,x,t)=J_1+J_2=-6\frac{\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+2\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}}{1+3\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+3\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}} \tag{9.5.21}$$

最后由(9.3.37)式求得问题(9.5.1)的解为

$$u=-12\frac{3+4\cosh 2(x-4t)+\cosh 4(x-16t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh 3(x-12t)]^2} \tag{9.5.22}$$

这就是 KdV 方程的双孤立子解,见图 9-1.(9.5.22)式与用推广的 Hopf-Cole 变换得到的(8.4.49)式完全一致.

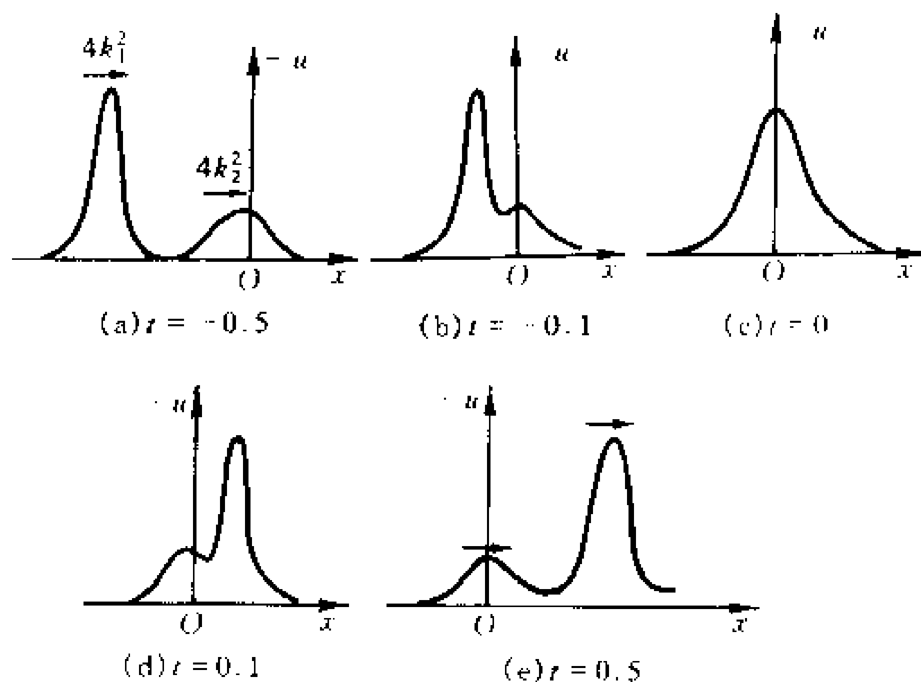


图 9.1

下面说明：当 $t\to\pm\infty$ 时，(9.5.22)式明显地表征双孤立子，即是两个单孤立子的叠加.

首先，固定 $\xi_1=x-4t$，因 $\xi_2=\xi_1-12t$，则当 $t\to-\infty$ 时，$e^{-4\xi_2}\to 0$；$t\to+\infty$ 时，$e^{4\xi_2}\to 0$. 因而

$$\lim_{\substack{t\to-\infty\\(\xi_1\text{固定})}} K(x,x,t)=-\frac{6e^{-2\xi_1}}{1+3e^{-2\xi_1}},\qquad \lim_{\substack{t\to+\infty\\(\xi_1\text{固定})}} K(x,x,t)=-\frac{6(1+2e^{2\xi_1})}{1+3e^{2\xi_1}}$$

(9.5.23)

所以有

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{t\to-\infty\\(\xi_1\text{固定})}} u=12\lim\limits_{\substack{t\to-\infty\\(\xi_1\text{固定})}}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-2\xi_1}}{1+3e^{-2\xi_1}}\right)=-2\operatorname{sech}^2(x-4t-\delta_1)\\[2ex] \lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\(\xi_1\text{固定})}} u=12\lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\(\xi_1\text{固定})}}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+2e^{2\xi_1}}{1+3e^{2\xi_1}}\right)^2=-2\operatorname{sech}^2(x-4t-\delta_1')\end{cases}$$

(9.5.24)

它表征以振幅 $a=-2$，波速 $c=4$ 前进的孤立波，其中 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\ln 3$，

$\delta_1' = -\frac{1}{2}\ln 3.$

其次，固定 $\xi_2 = x - 16t$，因 $\xi_1 = \xi_2 + 12t$，则当 $t \to -\infty$ 时，$e^{2\xi_1} \to 0$；$t \to +\infty$ 时，$e^{-2\xi_1} \to 0$，因而

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to -\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} K(x,x,t) = -\dfrac{6(1+e^{4\xi_2})}{1+3e^{4\xi_2}} \\ \lim\limits_{\substack{t \to +\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} K(x,x,t) = -\dfrac{12e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}} \end{cases} \tag{9.5.25}$$

所以有

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to -\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} u = 12 \lim\limits_{\substack{t \to -\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+e^{4\xi_2}}{1+3e^{4\xi_2}}\right) = -8\operatorname{sech}^2[2(x-16t-\delta_2)] \\ \lim\limits_{\substack{t \to +\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} u = 24 \lim\limits_{\substack{t \to +\infty \\ (\xi_2 \text{固定})}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}}\right) = -8\operatorname{sech}^2[2(x-16t-\delta_2')] \end{cases} \tag{9.5.26}$$

它表征以振幅 $a = -8$，波速 $c = 16$ 前进的孤立波，其中 $\delta_2 = -\frac{1}{4}\ln 3, \delta_2' = \frac{1}{4}\ln 3.$

9.6 Lax 方程

从 KdV 方程的散射反演法知，对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{9.6.1}$$

的求解实际上化成了下列关于 ψ 和 u 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda - u)\psi = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - E(t)\psi = 0 \end{cases} \tag{9.6.2}$$

的求解. 其中 λ 满足 $\frac{d\lambda}{dt} = 0$，$E(t) = 0$（离散谱）或 $E(t) = 4ik^3$（连续

谱).

Lax 把 KdV 方程的散射反演法加以推广,他认为求解非线性演化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=N\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right) \tag{9.6.3}$$

首先需要找到一个合适的本征值问题

$$L\psi=-\lambda\psi \tag{9.6.4}$$

其中 L 是与 u 有关的线性算子. 例如,(9.6.2)的第一个方程,即 Schrödinger 方程,L 为

$$L\equiv\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-u \tag{9.6.5}$$

其次,本征值 λ 要与 t 无关,即

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0 \tag{9.6.6}$$

最后,需要找到一个合适的线性算子 M,使得

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=M\psi \tag{9.6.7}$$

M 也与 u 有关. 例如,(9.6.2)的第二个方程,M 为

$$\begin{aligned}M&\equiv-\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3(u+\lambda)\frac{\partial}{\partial x}+E(t)\\&=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6u\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial x}+E(t)\end{aligned} \tag{9.6.8}$$

根据上述想法,Lax 得到了散射反演法的一般规律.

将(9.6.4)式的两边对时间 t 微商,规定 $\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial t}$,并利用(9.6.6)式,得到

$$\frac{\partial L}{\partial t}\psi+L\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{9.6.9}$$

(9.6.7)式代入(9.6.9)式得到

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[M,L] \tag{9.6.10}$$

它称为 Lax 方程，其中

$$[M,L]=ML-LM \tag{9.6.11}$$

称为 Poisson 括号或换位算子，由此可见，L 和 M 是自伴的线性算子，称为算子偶. 方程(9.6.4)和(9.6.7)称为 Lax 对(Lax pair).

这样，求解非线性演化方程(9.6.3)的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=N\left(u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right)\\ u\Big|_{t=0}=u_0(x)\end{cases} \tag{9.6.12}$$

可以分为三步.

第一步是正问题，根据 $u_0(x)$，求解本征值问题(9.6.4)，并求初始的散射量.

第二步是确定散射量的时间演变. 它根据方程(9.6.7)和 $|x|\to\infty$ 时 M 的渐近式去计算.

第三步是反问题. 根据散射量的时间演变由方程(9.6.4)去求 $u(x,t)$.

虽然，Lax 给出了用散射反演法求解非线性演化方程的一般规律，但 L 和 M 是很难找到的.

9.7 AKNS(Ablowitz-Kaup-Newell-Segur)方法

Ablowitz、Kaup、Newell 和 Segur 进一步把散射反演法加以推广. 他们注意到，用散射反演法求解 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{9.7.1}$$

实际上化成了下列 Lax 对

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\lambda-u)\psi=0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}+4\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-6u\dfrac{\partial\psi}{\partial x}-3\psi\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\quad(E(t)=0)\end{cases} \tag{9.7.2}$$

(见(9.6.2)式和(9.6.8)式)的求解问题.其中第二式的 $4\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}$ 用第一式的 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ 代入,还可改写为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\lambda-u)\psi=0\\[2ex]\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\dfrac{\partial u}{\partial x}-(2u+4\lambda)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0\end{cases}\tag{9.7.3}$$

一个很有趣的现象是,在(9.7.3)式中,若取 $\lambda=k^2$, $\psi=\psi_1$,则 Schrödinger 方程((9.7.3)的第一式)

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+(k^2-u)\psi_1=0\tag{9.7.4}$$

很易化为下列方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}+\mathrm{i}k\psi_1=\psi_2\\[2ex]\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}-\mathrm{i}k\psi_2=u\psi_1\end{cases}\tag{9.7.5}$$

而且,(9.7.5)式很容易改写为

$$\begin{cases}-\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}+\mathrm{i}\psi_2=-k\psi_1\\[2ex]-\mathrm{i}u\psi_1+\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}=-k\psi_2\end{cases}\tag{9.7.6}$$

因而,若令

$$\psi\equiv\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix},\quad L\equiv\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x} & \mathrm{i}\\[2ex]-\mathrm{i}u & \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\tag{9.7.7}$$

则方程组(9.7.6)可以表为

$$L\psi=-k\psi\tag{9.7.8}$$

此外,取 $\lambda=k^2$, $\psi=\psi_1$,(9.7.3)的第二式化为

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\psi_1\frac{\partial u}{\partial x}-(2u+4k^2)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0\tag{9.7.9}$$

其中的$\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}$用(9.7.5)的第一式代入后化为

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\left(-4ik^3-2iku-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_1+(4k^2+2u)\psi_2 \tag{9.7.10}$$

而将(9.7.5)的第一式两边对时间 t 微商，并再利用(9.7.5)式，不难求得

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=\left(-2ik\frac{\partial u}{\partial x}+4k^2u+2u^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\psi_1+\left(4ik^3+2iku+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_2 \tag{9.7.11}$$

这样，(9.7.9)式化为下列方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}=A\psi_1+B\psi_2\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t}=C\psi_1-A\psi_2\end{cases} \tag{9.7.12}$$

其中

$$\begin{cases}A=-4ik^3-2iku-\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm] B=4k^2+2u\\[2mm] C=-2ik\dfrac{\partial u}{\partial x}+4k^2u+2u^2-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{cases} \tag{9.7.13}$$

而且，若令

$$\psi\equiv\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\quad M\equiv\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix} \tag{9.7.14}$$

则方程组(9.7.12)可以表为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=M\psi \tag{9.7.15}$$

方程(9.7.8)和(9.7.13)构成 Lax 对，L 和 M 成为算子偶.

根据方程(9.7.5)和(9.7.12)，应有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) \tag{9.7.16}$$

它称为相容性条件(compatibility conditions or consistency condi-

tions).

(9.7.5)式和(9.7.12)式代入(9.7.16)式应有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}(\psi_2 - \mathrm{i}k\psi_1) = \dfrac{\partial}{\partial x}(A\psi_1 + B\psi_2) \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(u\psi_1 + \mathrm{i}k\psi_2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(C\psi_1 - A\psi_2)
\end{cases}
\tag{9.7.17}
$$

由此得到

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial A}{\partial x} - C + uB\right)\psi_1 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial x} + 2A + 2\mathrm{i}kB\right)\psi_2 = 0 \\
\left(\dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2uA - 2\mathrm{i}kC\right)\psi_1 + \left(-\dfrac{\partial A}{\partial x} + C - uB\right)\psi_2 = 0
\end{cases}
\tag{9.7.18}
$$

因 ψ_1 和 ψ_2 是独立的函数,则方程组(9.7.18)的所有关于 ψ_1 和 ψ_2 的系数应为零,所以

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial A}{\partial x} = C - uB \\
\dfrac{\partial B}{\partial x} = -2A - 2\mathrm{i}kB \\
\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2uA + 2\mathrm{i}kC
\end{cases}
\tag{9.7.19}
$$

(9.7.13)式代入显然是满足的.

上述处理可以加以推广.首先将(9.7.5)式推广为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \mathrm{i}\lambda\psi_1 = q\psi_2 \\
\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} - \mathrm{i}\lambda\psi_2 = r\psi_1
\end{cases}
\tag{9.7.20}
$$

其中 λ 为本征值,$q(x,t)$和 $r(x,t)$为势能,他们都是有待确定的某个非线性演化方程的解.

同样,若令

$$
\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad L \equiv \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x} & \mathrm{i}q \\ -\mathrm{i}r & \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad N \equiv \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\lambda & q \\ r & \mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}
\tag{9.7.21}
$$

则方程组(9.7.20)也可表为

$$L\psi = -\lambda\psi \quad 或 \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = N\psi \tag{9.7.22}$$

的形式.

同时,保留(9.7.15)式,即

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = M\psi, \quad M \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \tag{9.7.23}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} = A\psi_1 + B\psi_2 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} = C\psi_1 - A\psi_2 \end{cases} \tag{9.7.24}$$

则由相容性条件(9.7.16)有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(q\psi_2 - \mathrm{i}\lambda\psi_1) = \dfrac{\partial}{\partial x}(A\psi_1 + B\psi_2) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(r\psi_1 + \mathrm{i}\lambda\psi_2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(C\psi_1 - A\psi_2) \end{cases} \tag{9.7.25}$$

注意$\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0$,则由方程组(9.7.25)得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial A}{\partial x} - qC + rB\right)\psi_1 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial t} + 2qA + 2\mathrm{i}\lambda B\right)\psi_2 = 0 \\ \left(\dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial r}{\partial t} - 2rA - 2\mathrm{i}\lambda C\right)\psi_1 - \left(\dfrac{\partial A}{\partial x} - qC + rB\right)\psi_2 = 0 \end{cases} \tag{9.7.26}$$

因 ψ_1 和 ψ_2 是独立的函数,则方程组(9.7.26)的所有 ψ_1 和 ψ_2 的系数应为零,所以

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = -rB + qC \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial t} - 2qA - 2\mathrm{i}\lambda B \\ \dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial t} + 2rA + 2\mathrm{i}\lambda C \end{cases} \tag{9.7.27}$$

(9.7.27)式称为AKNS方程组.如假设$A(x,t,\lambda)$,$B(x,t,\lambda)$和$C(x,t,\lambda)$是λ或λ^{-1}的多项式,则通过AKNS方程组并比较λ的幂次,则可获得关于q和r的非线性演化方程以及关于ϕ_1和ϕ_2的Lax对.下面分三种情况说明.

1. 假设A,B,C是λ的三次多项式,即

$$\begin{cases}A=A_0+A_1\lambda+A_2\lambda^2+A_3\lambda^3\\B=B_0+B_1\lambda+B_2\lambda^2+B_3\lambda^3\\C=C_0+C_1\lambda+C_2\lambda^2+C_3\lambda^3\end{cases}\tag{9.7.28}$$

将它代入方程组(9.7.27)并比较每个方程两边λ的幂次,则分别得到:

$$\lambda^0:\ \frac{\partial A_0}{\partial x}=-rB_0+qC_0,\ \frac{\partial B_0}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial t}-2qA_0,\ \frac{\partial C_0}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial t}+2rA_0\tag{9.7.29}$$

$$\lambda^1:\ \frac{\partial A_1}{\partial x}=-rB_1+qC_1,\frac{\partial B_1}{\partial x}=-2qA_1-2\mathrm{i}B_0,\frac{\partial C_1}{\partial x}=2rA_1+2\mathrm{i}C_0\tag{9.7.30}$$

$$\lambda^2:\ \frac{\partial A_2}{\partial x}=-rB_2+qC_2,\frac{\partial B_2}{\partial x}=-2qA_2-2\mathrm{i}B_1,\frac{\partial C_2}{\partial x}=2rA_2+2\mathrm{i}C_1\tag{9.7.31}$$

$$\lambda^3:\ \frac{\partial A_3}{\partial x}=-rB_3+qC_3,\frac{\partial B_3}{\partial x}=-2qA_3-2\mathrm{i}B_2,\frac{\partial C_3}{\partial x}=2rA_3+2\mathrm{i}C_2\tag{9.7.32}$$

$$\lambda^4:\ B_3=0,\quad C_3=0\tag{9.7.33}$$

(9.7.33)式代入(9.7.32)式,得到

$$\frac{\partial A_3}{\partial x}=0,\quad B_2=\mathrm{i}qA_3,\quad C_2=\mathrm{i}rA_3\tag{9.7.34}$$

因而

$$A_3=\hat{A}_3(t),\quad B_2=\mathrm{i}q\hat{A}_3(t),\quad C_2=\mathrm{i}r\hat{A}_3(t)\tag{9.7.35}$$

其中$\hat{A}_3$是t的任意函数.(9.7.35)式代入(9.7.31)式,有

$$\frac{\partial A_2}{\partial x}=0,\quad \mathrm{i}\hat{A}_3\frac{\partial q}{\partial x}=-2qA_2-2\mathrm{i}B_1,$$

$$\mathrm{i}\hat{A}_3\frac{\partial r}{\partial x}=2rA_2+2\mathrm{i}C_1 \tag{9.7.36}$$

因而

$$A_2=\hat{A}_2(t),B_1=\mathrm{i}q\hat{A}_2-\frac{\hat{A}_3}{2}\frac{\partial q}{\partial x},\quad C_1=\mathrm{i}r\hat{A}_2+\frac{\hat{A}_3}{2}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{9.7.37}$$

其中 $\hat{A}_2$ 是 t 的任意函数.(9.7.37)式代入(9.7.30)式,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A_1}{\partial x}=\dfrac{\hat{A}_3}{2}\dfrac{\partial qr}{\partial x},\quad \mathrm{i}\hat{A}_2\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\hat{A}_3}{2}\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}=-2qA_1-2\mathrm{i}B_0\\ \mathrm{i}\hat{A}_2\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\hat{A}_3}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=2rA_1+2\mathrm{i}C_0\end{cases} \tag{9.7.38}$$

因而

$$\begin{cases}A_1=\dfrac{\hat{A}_3}{2}qr+\hat{A}_1(t),\ B_0=-\dfrac{\hat{A}_2}{2}\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{4}\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\dfrac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{2}q^2r+\mathrm{i}\hat{A}_1q\\ C_0=\dfrac{\hat{A}_2}{2}\dfrac{\partial r}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{4}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{2}qr^2+\mathrm{i}\hat{A}_1r\end{cases} \tag{9.7.39}$$

(9.7.39)式代入(9.7.29)的第一式,得到

$$\frac{\partial A_0}{\partial x}=\frac{\hat{A}_2}{2}\frac{\partial qr}{\partial x}+\frac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial q}{\partial x}-q\frac{\partial r}{\partial x}\right) \tag{9.7.40}$$

所以

$$A_0=\frac{\hat{A}_2}{2}qr+\frac{\mathrm{i}\hat{A}_3}{4}\left(r\frac{\partial q}{\partial x}-q\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\hat{A}_0(t) \tag{9.7.41}$$

其中 $\hat{A}_0$ 是 t 的任意函数.

若取 $\hat{A}_0=0,\hat{A}_1=0,\hat{A}_2=0,\hat{A}_3=-4\mathrm{i}$,则由(9.7.41)式、(9.7.39)式、(9.7.37)式、(9.7.35)式和(9.7.33)式,有

$$\begin{cases} A_0 = r\dfrac{\partial q}{\partial x} - q\dfrac{\partial r}{\partial x}, \quad A_1 = -2iqr, A_2 = 0, A_3 = 0 \\ B_0 = 2q^2r - \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}, B_1 = 2i\dfrac{\partial q}{\partial x}, B_2 = 4q, B_3 = 0 \\ C_0 = 2qr^2 - \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}, C_1 = -2i\dfrac{\partial r}{\partial x}, C_2 = 4r, C_3 = 0 \end{cases} \tag{9.7.42}$$

这样,(9.7.28)式化为

$$\begin{cases} A = -4i\lambda^3 - 2iqr\lambda + \left(r\dfrac{\partial q}{\partial x} - q\dfrac{\partial r}{\partial x}\right) \\ B = 4q\lambda^2 + 2i\dfrac{\partial q}{\partial x}\lambda + \left(2q^2r - \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right) \\ C = 4r\lambda^2 - 2i\dfrac{\partial r}{\partial x}\lambda + \left(2qr^2 - \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) \end{cases} \tag{9.7.43}$$

而以 A_0, B_0, C_0 代入(9.7.29)的第二式和第三式,求得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} - 6qr\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0 \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} - 6qr\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{9.7.44}$$

在(9.7.44)式中,若取 $q=1, r=u$(或 $q=u, r=1$),则化为 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{9.7.45}$$

相应,由(9.7.20)式和(9.7.24)式求得它的 Lax 对为

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\lambda\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i\lambda\psi_2 = u\psi_1 \tag{9.7.46}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = \left(-4i\lambda^3 - 2i\lambda u - \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_1 + (4\lambda^2 + 2u)\psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t} = \left(4\lambda^2 u - 2i\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2u^2 - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\psi_1 + \left(4i\lambda^3 + 2i\lambda u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_2 \end{cases} \tag{9.7.47}$$

(9.4.76)式形式同(9.7.5)式,(9.7.47)式形式同(9.7.12)式.

在(9.7.44)式中,若取 $q=r=u$,则化为 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (9.7.48)$$

相应,由(9.7.20)式和(9.7.24)式求得它的 Lax 对为

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}+\mathrm{i}\lambda\psi_1=u\psi_2,\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x}-\mathrm{i}\lambda\psi_2=u\psi_1 \qquad (9.7.49)$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}=(-4\mathrm{i}\lambda^3-2\mathrm{i}\lambda u^2)\psi_1+\left(4\lambda^2 u+2\mathrm{i}\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}+2u^3-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\psi_2\\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t}=\left(4\lambda^2 u-2\mathrm{i}\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}+2u^3-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\psi_1+(4\mathrm{i}\lambda^3+2\mathrm{i}\lambda u^2)\psi_1\end{cases}$$

(9.7.50)

2. 假设 A,B,C 是 λ 的二次多项式,即(9.7.28)式中 $A_3=B_3=C_3=0$ 的情况.

这样,以(9.7.28)式代入(9.7.27)式后,(9.7.29)式、(9.7.30)式和(9.7.31)式依然成立,而(9.7.32)式化为

$$B_2=0,\quad C_2=0 \qquad (9.7.51)$$

类似,很易求得

$$A_2=\hat{A}_2(t),\quad B_1=\mathrm{i}q\hat{A}_2(t),\quad C_1=\mathrm{i}r\hat{A}_2(t) \qquad (9.7.52)$$

$$A_1=\hat{A}_1(t),\quad B_0=\mathrm{i}q\hat{A}_1-\frac{\hat{A}_2}{2}\frac{\partial q}{\partial x},\quad C_0=\mathrm{i}r\hat{A}_1+\frac{\hat{A}_2}{2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

(9.7.53)

$$A_0=\frac{\hat{A}_2}{2}qr+\hat{A}_0(t) \qquad (9.7.54)$$

在上面诸式中 $\hat{A}_1,\hat{A}_2,\hat{A}_3$ 均是 t 的任意函数.

若取 $\hat{A}_0=0,\hat{A}_1=0,\hat{A}_2=-2\mathrm{i}$,则有

$$\begin{cases}A_0=-\mathrm{i}qr,\quad A_1=0,\quad A_2=-2\mathrm{i}\\ B_0=\mathrm{i}\dfrac{\partial q}{\partial x},\quad B_1=2q,\quad B_2=0\\ C_0=-\mathrm{i}\dfrac{\partial r}{\partial x},\quad C_1=2r,\quad C_2=0\end{cases} \qquad (9.7.55)$$

这样,(9.7.28)式化为

$$\begin{cases} A = -2\mathrm{i}\lambda^2 - \mathrm{i}qr \\ B = 2q\lambda + \mathrm{i}\dfrac{\partial q}{\partial x} \\ C = 2r\lambda - \mathrm{i}\dfrac{\partial r}{\partial x} \end{cases} \tag{9.7.56}$$

而以 A_0,B_0,C_0 代入(9.7.29)的第二式和第三式,求得

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} - 2q^2 r = 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{\partial r}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2qr^2 = 0 \end{cases} \tag{9.7.57}$$

在(9.7.57)式中,若取 $q=u, r=-\bar{u}$($\bar{u}$ 为 u 的复共轭),则化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0 \tag{9.7.58}$$

这是非线性 Schrödinger 方程的另一形式(见习题 6.16). 相应地,由(9.7.20)式和(9.7.24)式求得它的 Lax 对为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \mathrm{i}\lambda\psi_1 = u\psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} - \mathrm{i}\lambda\psi_2 = -\bar{u}\psi_1 \end{cases} \tag{9.7.59}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = (-2\mathrm{i}\lambda^2 + \mathrm{i}|u|^2)\psi_1 + \left(2\lambda u + \mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t} = \left(-2\lambda\bar{u} + \mathrm{i}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\psi_1 + (2\mathrm{i}\lambda^2 - \mathrm{i}|u|^2)\psi_2 \end{cases} \tag{9.7.60}$$

3. 假设 A,B,C 是 λ^{-1}的多项式,其中最简单的是与 λ^{-1}成正比的情况,即

$$A = l\lambda^{-1}, \quad B = m\lambda^{-1}, \quad C = n\lambda^{-1} \tag{9.7.61}$$

将(9.7.61)式代入方程组(9.7.27),得到

$$\lambda^{-1}:\ \frac{\partial l}{\partial x} = -rm + qn, \quad \frac{\partial m}{\partial x} = -2ql, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = 2rl \tag{9.7.62}$$

$$\lambda^0:\ \frac{\partial q}{\partial t} - 2\mathrm{i}m = 0,\quad \frac{\partial r}{\partial t} + 2\mathrm{i}n = 0 \tag{9.7.63}$$

(9.7.62)式与(9.7.63)式结合，得到

$$2\mathrm{i}\frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{\partial qr}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t} = -4\mathrm{i}lq,\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial t} = -4\mathrm{i}lr \tag{9.7.64}$$

若取 $l=\frac{\mathrm{i}}{4}\cos u, m=n=\frac{\mathrm{i}}{4}\sin u$，则(9.7.61)式化为

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\cos u, \quad B = \dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\sin u = -\dfrac{\mathrm{i}}{2\lambda}\dfrac{\partial q}{\partial t} \\ C = \dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\sin u = \dfrac{\mathrm{i}}{2\lambda}\dfrac{\partial r}{\partial t} \end{cases} \tag{9.7.65}$$

相应地，(9.7.64)式化为

$$2\frac{\partial qr}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos u),\quad \frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t} = q\cos u,\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial t} = r\cos u \tag{9.7.66}$$

在(9.7.66)式中，若取 $q=-r=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$，则化为

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial t} = \sin u \tag{9.7.67}$$

这是正弦-Gordon 方程的另一形式(见(7.6.4)式)。相应地，由(9.7.20)式和(9.7.24)式求得它的 Lax 对为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \mathrm{i}\lambda\psi_1 = -\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} - \mathrm{i}\lambda\psi_2 = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_1 \end{cases} \tag{9.7.68}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\cos u\right)\psi_1 + \left(\dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\sin u\right)\psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t} = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\sin u\right)\psi_1 + \left(-\dfrac{\mathrm{i}}{4\lambda}\cos u\right)\psi_2 \end{cases} \tag{9.7.69}$$

剩下的问题就是求解方程组(9.7.20)的散射反演问题，从而利用它可以求解 mKdV 方程、非线性 Schrödinger 方程、正弦-

Gordon 方程等其它的非线性演化方程．不过，由于方程组(9.7.20)的散射反演问题叙述复杂，到目前为止得到的一些解仍然可以用别的相对简单的方法去得到，所以，这里不再论述了．

习 题 9

9.1 证明 KdV 方程单孤立子解中 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+(\lambda+2\mathrm{sech}^2x)\psi_0=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ \psi_0\Big|_{x\to\pm\infty}=0,\quad \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty}=0\end{cases}$$

可以通过变换

$$\psi_0=\phi_0\mathrm{sech}x,\quad \xi=\sinh^2x \quad (\phi_0=\sqrt{1+\xi}\psi_0)$$

化为下列超比方程的本征值问题

$$\begin{cases}\xi(1+\xi)\dfrac{\mathrm{d}^2\phi_0}{\mathrm{d}\xi^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi}+\dfrac{1}{4}(1+\lambda)\phi_0=0\\ \phi_0\Big|_{\xi\to\infty}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi}\Big|_{\xi\to\infty}=0\end{cases}$$

并求解．

9.2 证明 KdV 方程双孤立子解中 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+(\lambda+6\mathrm{sech}^2x)\psi_0=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ \psi_0\Big|_{x\to\pm\infty}=0,\dfrac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\Big|_{x\to\pm\infty}=0\end{cases}$$

可以通过变换

$$\psi_0=\phi_0\mathrm{sech}^2x,\quad \xi=\sinh^2x \quad (\phi_0=(1+\xi)\psi_0)$$

化为下列超比方程的本征值问题

$$\begin{cases}\xi(1+\xi)\dfrac{\mathrm{d}^2\phi_0}{\mathrm{d}\xi^2}+\left(\dfrac{1}{2}-\xi\right)\dfrac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi}+\dfrac{1}{4}(4+\lambda)\phi_0=0\\ \phi_0\Big|_{\xi\to\infty}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi}\Big|_{\xi\to\infty}=0\end{cases}$$

并求解.

9.3 用散射反演法求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = -\dfrac{9}{2}\operatorname{sech}^2\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

9.4 用散射反演法求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = -9\operatorname{sech}^2 x \end{cases}$$

9.5 证明：线性 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 u = 0$$

可以化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c_0\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_0 v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = -f_0 u \end{cases}$$

9.6 利用(9.7.21)式和(9.7.23)式，证明：相容性条件为

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} + [M,N] = 0$$

其中$[M,N]=MN-NM$.

9.7 设 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 是方程组(9.7.20)的解，若 $r=\pm q$，证明

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_2(x,-\lambda)\\ \pm\psi_1(x,-\lambda)\end{pmatrix}$$

9.8 在(9.7.44)式中，取 $q=u$，$r=-u$，求非线性演化方程和相应的 Lax 对.

第 10 章　Bäcklund 变换

非线性方程找到一个解是很困难的，找到更多的解更是难上难. Bäcklund 变换是建立一个非线性偏微分方程的解与另一个已知的线性偏微分方程解之间的关系或者是建立一个非线性偏微分方程两个不同解之间的联系. 这样，我们就可以根据已知线性偏微分方程的解去求非线性偏微分方程的解或者根据非线性偏微分方程的一个解去找别的解.

10.1　Bäcklund 变换

我们分两种情况来说明.

1. 不同方程之间的 Bäcklund 变换

设 $u(x,t)$ 是一个待求的非线性偏微分方程

$$N(u) = 0 \tag{10.1.1}$$

的解，又设 $v(x,t)$ 是一个已知的简单的线性偏微分方程

$$L(v) = 0 \tag{10.1.2}$$

的解. 那么，u 和 v 之间的 Bäcklund 变换是下列一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P\left(u, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, x, t\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = Q\left(u, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, x, t\right) \end{cases} \tag{10.1.3}$$

如果上述关系能够找到，则可以由 v 去求 u. 注意(10.1.3)式中的 u 与 v 可以互换. 我们举两例说明.

例 1　Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10.1.4}$$

我们在 8.3 节，通过 Hopf-Cole 变换

$$u = -2\nu \frac{\partial \ln v}{\partial x} = -\frac{2\nu}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{10.1.5}$$

使 Burgers 方程(10.1.4)化为下列线性耗散方程：

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{10.1.6}$$

由(10.1.5)式有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\nu}uv \tag{10.1.7}$$

这就是我们找到的 Burgers 方程与线性耗散方程之间 Bäcklund 变换(10.1.3)的一个方程.

(10.1.7)式两边对 x 微商，再利用(10.1.7)式，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\nu}v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4\nu^2}u^2 v \tag{10.1.8}$$

(10.1.8)式两边乘以 ν，并利用(10.1.6)式，得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4\nu}u^2 v \tag{10.1.9}$$

这就是我们找到的 Burgers 方程与线性耗散方程之间 Bäcklund 变换(10.1.3)的另一个方程.

所以，Burgers 方程(10.1.4)与线性耗散方程(10.1.6)之间的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\nu}uv \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}v\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{4\nu}u^2 v \end{cases} \tag{10.1.10}$$

显然，它们满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{10.1.11}$$

它称为可积性条件，(integrability conditions)，也就是第 9 章的相容性条件. 这样，我们可以由线性耗散方程(10.1.6)的解去求 Burgers 方程的解. 我们在 8.3 节已经举了几个例子，这里不再列举了.

例 2 Liouville 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^u \tag{10.1.12}$$

我们要建立它与线性波方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \tag{10.1.13}$$

之间的 Bäcklund 变换. 显然、它们之间的 Bäcklund 变换可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + a e^{\frac{u+v}{2}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{2}{a} e^{\frac{u-v}{2}} \end{cases} \tag{10.1.14}$$

其中 a 为任意非零常数.

若将(10.1.14)的第一式两边对 y 微商,并利用(10.1.14)的第二式和(10.1.13)式,有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) e^{\frac{u+v}{2}} = e^u \tag{10.1.15}$$

类似,若将(10.1.14)的第二式两边对 x 微商,并利用(10.1.14)的第一式和(10.1.13)式,有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) e^{\frac{u-v}{2}} = e^u \tag{10.1.16}$$

因此,Bäcklund 变换(10.1.14)满足可积性条件

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10.1.17}$$

有了 Bäcklund 变换(10.1.14),我们就可以由线性波方程(10.1.13)的解去求 Liouville 方程(10.1.12)的解.

我们首先将 Bäcklund 变换(10.1.14)改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(u - v) = a e^{\frac{u-v}{2}} \cdot e^{v} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(u + v) = \dfrac{2}{a} e^{\frac{u+v}{2}} \cdot e^{-v} \end{cases} \tag{10.1.18}$$

因而

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{u-v}{2}}\right) = -\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{v} \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{-\frac{u+v}{2}}\right) = -\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-v}
\end{cases}
\tag{10.1.19}
$$

因为线性波方程(10.1.13)的通解为

$$
v = F(x) + G(y) \tag{10.1.20}
$$

其中 $F(x)$ 和 $G(y)$ 为任意函数. 则将(10.1.20)式代入方程组(10.1.19),得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[u-v+2G(y)]}\right\} = -\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{F(x)} \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[u+v-2F(x)]}\right\} = -\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-G(y)}
\end{cases}
\tag{10.1.21}
$$

注意,利用(10.1.20)式有

$$
u - v + 2G(y) = u + v - 2F(x) = u - F(x) + G(y) \tag{10.1.22}
$$

这样,(10.1.21)的两式分别对 x 和对 y 积分,得到

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[u-F(x)+G(y)]} = -\dfrac{a}{2}\displaystyle\int \mathrm{e}^{F(x)}\mathrm{d}x + S(y) \\
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[u-F(x)+G(y)]} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int \mathrm{e}^{-G(y)}\mathrm{d}y + R(x)
\end{cases}
\tag{10.1.23}
$$

其中 $R(x)$ 和 $S(y)$ 是任意函数. (10.1.23)的两式左边相等,右边也应相等,则得

$$
R(x) + \frac{a}{2}\int \mathrm{e}^{F(x)}\mathrm{d}x = S(y) + \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{-G(y)}\mathrm{d}y \tag{10.1.24}
$$

上式左边只是 x 的函数,右边只是 y 的函数,两边相等只有为一常数,取此常数为零,则求得

$$
R(x) = -\frac{a}{2}\int \mathrm{e}^{F(x)}\mathrm{d}x,\quad S(y) = -\frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{-G(y)}\mathrm{d}y \tag{10.1.25}
$$

这样,(10.1.23)式化为

$$
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[u-F(x)+G(y)]} = -\frac{a}{2}\int \mathrm{e}^{F(x)}\mathrm{d}x - \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{-G(y)}\mathrm{d}y \tag{10.1.26}
$$

上式两边取对数，求得

$$u = F(x) - G(y) - 2\ln\left\{-\frac{a}{2}\int e^{F(x)}dx - \frac{1}{a}\int e^{-G(y)}dy\right\} \tag{10.1.27}$$

这就是根据线性波方程(10.1.13)的通解(10.1.20)按 Bäcklund 变换求得的 Liouville 方程(10.1.12)的通解公式.

在(10.1.27)式中，若取 $a=-1, F(x)=\ln 2f'(x), -G(y)=\ln g'(y)$则得到

$$u = \ln\left\{\frac{2f'(x)g'(y)}{[f(x)+g(y)]^2}\right\} \tag{10.1.28}$$

这就是我们在 8.2 节求得的 Liouville 方程的解(8.2.39)式. 其中 $f(x)$和 $g(y)$为任意函数.

2. 同一个方程两个不同解之间的 Bäcklund 变换

设 $u(x,t)$和 $u_0(x,t)$是非线性偏微分方程(10.1.1)的两个解，那么，u 和 u_0 之间的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = P\left(u, u_0, \dfrac{\partial u_0}{\partial x}, \dfrac{\partial u_0}{\partial t}, x, t\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = Q\left(u, u_0, \dfrac{\partial u_0}{\partial x}, \dfrac{\partial u_0}{\partial t}, x, t\right)\end{cases} \tag{10.1.29}$$

如果上述关系能够找到，那么，我们就可以由非线性偏微分方程的一个解 u_0 去找它的另一个解 u，而且可以反复运用.

这方面的例子我们在后两节说明.

10.2 正弦-Gordon 方程

在 7.6 节我们已说明，正弦-Gordon 方程可以表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \sin u \tag{10.2.1}$$

我们设 $u(\xi,\eta)$和 $u_0(\xi,\eta)$都是正弦-Gordon 方程的解，即 u 和 u_0 分别满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u_0 \tag{10.2.2}$$

把这两个方程相加和相减，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(u+u_0)=\sin u+\sin u_0=2\sin\dfrac{u+u_0}{2}\cos\dfrac{u-u_0}{2}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(u-u_0)=\sin u-\sin u_0=2\cos\dfrac{u+u_0}{2}\sin\dfrac{u-u_0}{2}\end{cases} \tag{10.2.3}$$

由此我们求得正弦-Gordon 方程(10.2.1)的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}+2a\sin\dfrac{u+u_0}{2}\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=-\dfrac{\partial u_0}{\partial\eta}+\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{u-u_0}{2}\end{cases} \tag{10.2.4}$$

其中 a 为任意非零常数.

(10.2.4)的两个方程分别对 η 和对 ξ 微商，并利用(6.4.4)式，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}+a\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+\dfrac{\partial u_0}{\partial\eta}\right)\cos\dfrac{u+u_0}{2}\\ \qquad\qquad=\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}+2\cos\dfrac{u+u_0}{2}\sin\dfrac{u-u_0}{2}\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=-\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}\right)\cos\dfrac{u-u_0}{2}\\ \qquad\qquad=-\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}+2\sin\dfrac{u+u_0}{2}\cos\dfrac{u-u_0}{2}\end{cases} \tag{10.2.5}$$

这就是方程组(10.2.3). 而且

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{10.2.6}$$

有了 Bäcklund 变换(10.2.4)，我们就可以根据正弦-Gordon 方程的一个解去找它的另一个解.

例如 $u_0=0$ 是正弦-Gordon 方程(10.2.1)的一个解，则由

Bäcklund 变换(10.2.4),得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=2a\sin\dfrac{u}{2}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{u}{2}\end{cases}\tag{10.2.7}$$

(10.2.7)的两式分别对 ξ 和对 η 积分,则得

$$\begin{cases}\ln\tan\dfrac{u}{4}=a\xi+G(\eta)\\[2mm]\ln\tan\dfrac{u}{4}=\dfrac{1}{a}\eta+F(\xi)\end{cases}\tag{10.2.8}$$

其中 $F(\xi)$ 和 $G(\eta)$ 是任意函数. 比较(10.2.8)的两式有

$$F(\xi)-a\xi=G(\eta)-\frac{1}{a}\eta\tag{10.2.9}$$

上式左边只是 ξ 的函数,右边只是 η 的函数,两边相等只有为一常数,取此常数为 δ,则求得

$$F(\xi)=a\xi+\delta, G(\eta)=\frac{1}{a}\eta+\delta\tag{10.2.10}$$

这样,(10.2.8)式化为

$$\ln\tan\frac{u}{4}=a\xi+\frac{1}{a}\eta+\delta\tag{10.2.11}$$

因而

$$\tan\frac{u}{4}=e^{a\xi+\frac{1}{a}\eta+\delta}\tag{10.2.12}$$

以(7.6.3)式代入(10.2.12)式,得

$$\tan\frac{u}{4}=\exp\left\{\frac{a^2+1}{2a}\lambda_0\left(x-\frac{a^2-1}{a^2+1}c_0t\right)+\delta\right\}\tag{10.2.13}$$

若取 $a^2=\dfrac{c_0+c}{c_0-c}$ $(c<c_0)$,则 $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}c_0=c$,$\dfrac{a^2+1}{2a}\lambda_0=\pm n$ $\left(n=\dfrac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right)$,则(10.2.13)式化为

$$\tan\frac{u}{4}=\mathrm{e}^{[\pm\eta(x-ct)-\delta]} \tag{10.2.14}$$

这就是我们在 6.4 节用行波法求得的 $c^2<c_0^2$ 情况下正弦-Gordon 方程的扭结或反扭结孤立波解(见(6.4.24)式).

又例如 $u_0=\pi$ 是正弦-Gordon 方程(10.2.1)的一个解，则由 Bäcklund 变换(10.2.4)，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=2a\sin\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2a\cos\dfrac{u}{2}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\dfrac{2}{a}\sin\left(\dfrac{u}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{a}\cos\dfrac{u}{2}\end{cases} \tag{10.2.15}$$

(10.2.15)的两式分别对 ξ 和对 η 积分，则得

$$\begin{cases}\ln\tan\left(\dfrac{u}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=a\xi+S(\eta)\\[2mm] \ln\tan\left(\dfrac{u}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{a}\eta+R(\xi)\end{cases} \tag{10.2.16}$$

其中 $R(\xi)$和 $S(\eta)$是任意函数.类似(10.2.8)式的处理，我们有

$$R(\xi)-a\xi=S(\eta)+\frac{1}{a}\eta=\delta \tag{10.2.17}$$

因而

$$R(\xi)=a\xi+\delta,\quad S(\eta)=-\frac{1}{a}\eta+\delta \tag{10.2.18}$$

这样，(10.2.16)式化为

$$\ln\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=a\xi-\frac{1}{a}\eta+\delta \tag{10.2.19}$$

所以

$$\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{a\xi-\frac{1}{a}\eta+\delta} \tag{10.2.20}$$

以(7.6.3)式代入(10.2.20)式，得

$$\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left\{\frac{a^2-1}{2a}\lambda_0\left(x-\frac{a^2+1}{a^2-1}c_0t\right)+\delta\right\} \tag{10.2.21}$$

若取

$$a^2=\frac{c+c_0}{c-c_0}\ (c>c_0),$$

则

$$\frac{a^2+1}{a^2-1}c_0=c,\quad \frac{a^2-1}{2a}\lambda_0=\pm m\left[m=\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\right],$$

那么(10.2.21)式化为

$$\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=e^{[\pm m(x-ct)-\delta]} \qquad (10.2.22)$$

这就是我们在 6.4 节用行波法求得的 $c^2>c_0^2$ 情况下正弦-Gordon 方程的扭结或反扭结孤立波解.(见(6.4.14)式).

下面应用 Bäcklund 变换(10.2.4)式给出正弦-Gordon 方程的非线性叠加公式并根据此叠加公式求出正弦-Gordon 方程的双扭结孤立波解.

1. 非线性叠加公式

利用 Bäcklund 变换,我们可以根据非线性演化方程的一个解 u_0 求出它的另一个解 u. 同样,我们可以根据这个 u 还可以求出新的解. 我们设想,由 u_0 分别选择参数 a_1 和 a_2 可分别求得 u_1 和 u_2,再由这个 u_1 和 u_2 分别选择参数 a_2 和 a_1 可以求得 u_3 和 u_4,并选择合适的积分常数使 $u_3=u_4$,其构想见图 10-1.

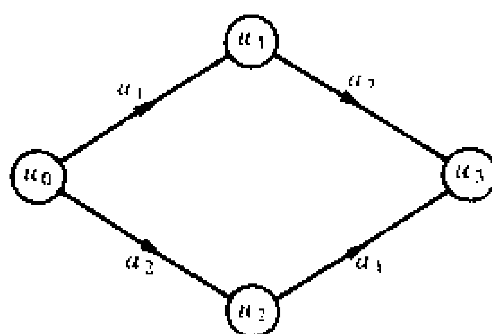


图 10-1

按照上述设想,则由 Bäcklund 变换(10.2.4)的第一式(也可

以用第二式)，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}+2a_1\sin\dfrac{u_1+u_0}{2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}+2a_2\sin\dfrac{u_2+u_0}{2}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi}=\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}+2a_2\sin\dfrac{u_3+u_1}{2}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi}=\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi}+2a_1\sin\dfrac{u_3+u_2}{2}\end{cases}\tag{10.2.23}$$

它称为 Bäcklund 变换的可交换性.

将方程组(10.2.23)的第一式和第三式相加，第二式和第四式相加，分别得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \xi}(u_3-u_0)=2\left(a_1\sin\dfrac{u_1+u_0}{2}+a_2\sin\dfrac{u_3+u_1}{2}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \xi}(u_3-u_0)=2\left(a_1\sin\dfrac{u_3+u_2}{2}+a_2\sin\dfrac{u_2+u_0}{2}\right)\end{cases}\tag{10.2.24}$$

(10.2.24)的两式左边相等，右边也应相等，则得

$$a_1\left(\sin\frac{u_3+u_2}{2}-\sin\frac{u_1+u_0}{2}\right)=a_2\left(\sin\frac{u_3+u_1}{2}-\sin\frac{u_2+u_0}{2}\right)\tag{10.2.25}$$

利用 $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，(10.2.25)式化为

$$a_1\sin\left(\frac{u_3-u_0}{4}-\frac{u_1-u_2}{4}\right)=a_2\sin\left(\frac{u_3-u_0}{4}+\frac{u_1-u_2}{4}\right)\tag{10.2.26}$$

由此求得

$$\tan\frac{u_3-u_0}{4}=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\frac{u_1-u_2}{4}\tag{10.2.27}$$

它称为正弦-Gordon 方程解的非线性叠加公式. 由这个叠加公式，我们可以只应用纯代数的运算就可以根据 u_0，u_1 和 u_2 找到正弦-

Gordon 方程的一个新解 u_3.

2. 双扭结孤立波解

下面，我们应用正弦-Gordon 方程解的非线性叠加公式(10.2.27)求正弦-Gordon 方程的双扭结孤立波解.

在 $0<c<c_0$ 的情况，若我们取

$$u_0 = 0,\quad \tan\frac{u_1}{4} = e^{n(x-ct)},\quad \tan\frac{u_2}{4} = e^{n(x+ct)} \tag{10.2.28}$$

其中 u_1 代表以速度 c 向 x 正方向前进的扭结孤立波，u_2 代表以速度 c 向 x 反方向前进的扭结孤立波. 在(10.2.27)式中取

$$a_1 = \sqrt{\frac{c_0+c}{c_0-c}},\quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \sqrt{\frac{c_0-c}{c_0+c}} \tag{10.2.29}$$

这样，(10.2.28)式和(10.2.29)式代入(10.2.27)式，便求得

$$\tan\frac{u_3}{4} = -\frac{c_0}{c}\cdot\frac{\sinh nct}{\cosh nx} \tag{10.2.30}$$

它表征两个不同方向前进的扭结孤立波的相互作用，称为正弦 Gordon 方程的双扭结孤立波解.

由(10.2.30)式不难求得

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}\tan\frac{u_3}{4} = \frac{c_0}{2c\sinh 2nx}\left[e^{n(x-ct)} - e^{-n(x+ct)}\right] \\ \lim\limits_{t\to-\infty}\tan\frac{u_3}{4} = -\frac{c_0}{2c\sinh 2nx}\left[e^{n(x-ct)} - e^{-n(x-ct)}\right] \end{cases} \tag{10.2.31}$$

因此，(10.2.30)式确实表征两个单扭结孤立波的叠加.

同样，在 $0<c<c_0$ 的情况，我们取

$$u_0 = 0,\ \tan\frac{u_1}{4} = e^{n(x-ct)},\quad \tan\frac{u_2}{4} = e^{-n(x+ct)} \tag{10.2.32}$$

显然，u_1 代表以速度 c 向 x 正方向前进的扭结孤立波，u_2 代表以速度 c 向 x 反方向前进的反扭结孤立波. 同时，在(10.2.27)式中取

$$a_1 = \sqrt{\frac{c_0 + c}{c_0 - c}}, a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\sqrt{\frac{c_0 - c}{c_0 + c}} \quad (10.2.33)$$

这样，(10.2.32)式和(10.2.33)式代入(10.2.27)式，便求得

$$\tan\frac{u_3}{4} = \frac{c}{c_0}\frac{\sinh nx}{\cosh nct} \quad (10.2.34)$$

它表征两个不同方向前进的正、反扭结孤立波的相互作用，也称为正弦-Gordon 方程的双扭结孤立波解．而且由(10.2.34)式不难求得

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty}\tan\frac{u_3}{4} = \frac{c}{c_0}\left[e^{n(x+ct)} - e^{-n(x-ct)}\right] \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\tan\frac{u_3}{4} = \frac{c}{c_0}\left[e^{n(x-ct)} - e^{-n(x+ct)}\right] \end{cases} \quad (10.2.35)$$

这也是两个扭结孤立波的叠加．

10.3 KdV 方程

对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (10.3.1)$$

若令

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (10.3.2)$$

代入方程(10.3.1)，对 x 积分并取积分常数为零，则得

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (10.3.3)$$

我们设 $w(x,t)$ 和 $w_0(x,t)$ 都是 KdV 方程(10.3.3)的解，即 w 和 w_0 分别满足

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = 3u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} = 3u_0^2 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad u_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (10.3.4)$$

我们通过散射反演法导出 KdV 方程的 Bäcklund 变换. 由散射反演法知, u 和 u_0 分别满足 Schrödinger 方程, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda - u)\psi = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + (\lambda - u_0)\psi_0 = 0 \end{cases} \tag{10.3.5}$$

为了找到 KdV 方程的 Bäcklund 变换. 我们先用一个简单的例子: 取 $u_0 = 0, u = -2\operatorname{sech}^2 x$, 则(10.3.5)式化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\operatorname{sech}^2 x)\psi = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \lambda\psi_0 = 0 \end{cases} \tag{10.3.6}$$

(10.3.6)的第一个方程可以改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \tanh x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tanh x\right)\psi = -(\lambda + 1)\psi \tag{10.3.7}$$

这样, 很易证明: 若令

$$\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tanh x\right)\psi_0 \tag{10.3.8}$$

则只要 ψ_0 满足(10.3.6)的第二个方程, 则 ψ 就满足(10.3.6)的第一个方程. 反之亦然.

这个例子给我们一个启发, 当 u_0 和 u 都不为零时, 可以通过 ψ 与 ψ_0 的联系建立 u 与 u_0 的联系. 为此, Darboux 设法找到一个连续函数 $v(x)$ 使得

$$\psi = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - v(x)\psi_0 \tag{10.3.9}$$

来建立 u 与 u_0 之间的联系.

(10.3.9)式代入(10.3.5)的第一个方程, 并利用(10.3.5)的第二个方程, 得到

$$\left(u_0 - u - 2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (u_0 - u)v\right]\psi_0 = 0 \tag{10.3.10}$$

由此使我们选择 $v(x)$ 满足

$$
\begin{cases}
u_0 - u - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial u_0}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (u_0 - u)v = 0
\end{cases}
\tag{10.3.11}
$$

(10.3.11)的两式结合有

$$
\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{10.3.12}
$$

(10.3.12)式对 x 积分一次，并与 GGKM 变换(9.1.13)比较有

$$
u_0 = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 + \lambda \tag{10.3.13}
$$

同时，以 $u_0=\dfrac{\partial w_0}{\partial x}$ 和 $u=\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 代入到(10.3.11)的第一个方程，得到

$$
\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{10.3.14}
$$

上式对 x 积分并取积分常数为零，则得

$$
v = \frac{1}{2}(w_0 - w) \tag{10.3.15}
$$

这就是我们找到的 $v(x)$. 在(10.3.6)式的例子中，$w_0=0$、$w=-2\tanh x\left(u=\dfrac{\partial w}{\partial x}=-2\operatorname{sech}^2 x\right)$，则由(10.3.15)式有 $v=\tanh x$，这就出现(10.3.8)式的结果.

(10.3.15)式代入(10.3.13)式得到

$$
\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{4}(w_0 - w)^2 + \lambda \tag{10.3.16}
$$

因而

$$
\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + 2\lambda + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 \tag{10.3.17}
$$

这就是 KdV 方程(10.3.3)的 Bäcklund 变换的一个表达式. 另一个表达式可由(10.3.4)式和(10.3.17)式获得.

把(10.3.4)式的两个方程相加，得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+3u^2+3u_0^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u+u_0)\quad(10.3.18)$$

但(10.3.17)式给出

$$u+u_0=2\lambda+\frac{1}{2}(w_0-w)^2\qquad(10.3.19)$$

这样就有

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+u_0)=(w-w_0)\frac{\partial}{\partial x}(w-w_0)=(w-w_0)(u-u_0)$$

$$(10.3.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u+u_0)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)(u-u_0)+(w-w_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$$
$$=(u-u_0)^2+(w-w_0)\frac{\partial}{\partial x}(u+u_0)-2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$(10.3.21)$$

(10.3.20)式代入(10.3.21)式,得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u+u_0)=(u-u_0)^2+(w-w_0)^2(u-u_0)-2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$(10.3.22)$$

(10.3.22)式代入(10.3.22)式,得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+3u^2+3u_0^2-(u-u_0)^2-(u-u_0)$$
$$\times(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$
$$=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+2u(u+u_0)+2u_0^2-u(w-w_0)^2$$
$$+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$
$$=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+2u\left[(u+u_0)-\frac{1}{2}(w-w_0)^2\right]$$
$$+2u_0^2+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$(10.3.23)$$

(10.3.19)式代入(10.3.23)式，得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+4\lambda u+2u_0^2+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

(10.3.24)

这是 KdV 方程(10.3.3)的另一个 Bäcklund 变换的表达式.

结合(10.3.17)式和(10.3.24)式，我们得到 KdV 方程(10.3.3)的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+2\lambda+\dfrac{1}{2}(w-w_0)^2\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial t}+4\lambda\dfrac{\partial w}{\partial x}+2\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+(w-w_0)^2\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\\[2mm] \qquad +2(w-w_0)\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\end{cases}$$

(10.3.25)

其中第二个方程可以通过第一个方程消去 λ 还可以表为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$-(w-w_0)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\qquad(10.3.26)$$

有了(10.3.25)式，我们就可以根据 KdV 方程的一个解去找它的另一个解. 例如，$w_0=0$ 是 KdV 方程(10.3.3)的一个解，则由(10.3.25)式有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=2\lambda+\dfrac{1}{2}w^2\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}=4\lambda\dfrac{\partial w}{\partial x}\end{cases}\qquad(10.3.27)$$

其中的第二个方程是线性平流方程，其通解为

$$w=f(x+4\lambda t)\qquad(10.3.28)$$

若取

$$\lambda=-k^2,\quad w\Big|_{t=0}=-2k\tanh kx=f(x)\quad(10.3.29)$$

则

$$w = f(x - 4k^2t) = -2k\tanh k(x - 4k^2t) \tag{10.3.30}$$

因而

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} = -2k^2\operatorname{sech}^2 k(x - 4k^2t) \tag{10.3.31}$$

这是 KdV 方程(10.3.3)的孤立子解(见(8.4.45)式).

类似于正弦-Gordon 方程的非线性叠加公式,我们可以建立 KdV 方程的非线性叠加公式.

利用图 10.1 的构想到 Bäcklund 变换(10.3.25)的第一式,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} + 2\lambda_1 + \dfrac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} + 2\lambda_2 + \dfrac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + 2\lambda_2 + \dfrac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + 2\lambda_1 + \dfrac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 \end{cases} \tag{10.3.32}$$

其中的第三个方程减去第一个方程,第四个方程减去第二个方程,分别得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_3}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 - \dfrac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 + 2\lambda_2 - 2\lambda_1 \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 - \dfrac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases} \tag{10.3.33}$$

(10.3.33)的两式左边相等,右边也应相等,则得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(w_3 - w_0)(w_3 - 2w_1 + w_0) + 2\lambda_2 - 2\lambda_1 \\ &\quad = \frac{1}{2}(w_3 - w_0)(w_3 - 2w_2 + w_0) + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{aligned} \tag{10.3.34}$$

因而

$$(w_3 - w_0)(w_2 - w_1) = 4(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{10.3.35}$$

由此求得

$$w_3 = w_0 - \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_1 - w_2} \tag{10.3.36}$$

这是 KdV 方程(10.3.3)的非线性叠加公式. 注意 $u = \frac{\partial w}{\partial x}$, 则把(10.3.36)式两边对 x 微商, 就得到 KdV 方程(10.3.1)的非线性叠加公式为

$$u_3 = u_0 + \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{(w_1 - w_2)^2}(u_1 - u_2) \tag{10.3.37}$$

应用这个叠加公式, 我们可以求得 KdV 方程更多的解, 例如 KdV 方程的双孤立子解. 但双孤立子解我们已在第 8 章和第 9 章中多次阐述过, 这里不再重复(见习题 10.8).

10.4 Darboux 变换

第 9 章应用散射反演法求解 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{10.4.1}$$

实际上化成了它的 Lax 对(见(9.7.2)式)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda - u)\psi = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + 4\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - 3\psi\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (E(t) = 0) \end{cases} \tag{10.4.2}$$

的求解问题, 但 Lax 对(10.4.2)的求解是相当困难的. 10.3 节 Darboux 引入一个连续函数 $v(x)$ 来建立 ψ 与 ψ_0、u 与 u_0 之间的联系, 即

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{\partial \psi_0}{\partial x} - v(x)\psi_0 \\ u = u_0 - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{10.4.3}$$

它称为 Darboux 变换. 而 $v(x)$ 满足(10.3.13)式, 即

$$\frac{\partial v}{\partial x}+v^2+(\lambda-u_0)=0 \tag{10.4.4}$$

这是关于 v 的 Riccati 方程，若令

$$v=\frac{1}{\psi_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=\frac{\partial\ln\psi_0}{\partial x} \tag{10.4.5}$$

则方程(10.4.4)化为

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+(\lambda-u_0)\psi_0=0 \tag{10.4.6}$$

它表示 ψ_0 满足势能为 u_0 的 Schrödinger 方程.

设 ψ_0^* 是当 $\lambda=\lambda_0$ 时，方程(10.4.6)的一个特解，即 ψ_0^* 满足

$$\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x^2}+(\lambda_0-u_0)\psi_0^*=0 \tag{10.4.7}$$

相应(10.4.5)式化为

$$v=v^*=\frac{\partial\ln\psi_0^*}{\partial x} \tag{10.4.8}$$

在(10.4.3)式中我们就选取 v 为 v^*，则 Darboux 变换(10.4.3)化为

$$\begin{cases}\psi=\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x}-\left(\dfrac{\partial\ln\psi_0^*}{\partial x}\right)\psi_0\\ u=u_0-2\dfrac{\partial^2\ln\psi_0^*}{\partial x^2}\end{cases} \tag{10.4.9}$$

它给出了 ψ 与 ψ_0，u 与 u_0 之间的确切联系，从而使我们有可能根据 ψ_0,ψ_0^*,u_0 找到 KdV 方程的新解，例如：取 $u_0=0$，(10.4.6)式化为

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+\lambda\psi_0=0 \tag{10.4.10}$$

其通解为

$$\psi_0=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{10.4.11}$$

其中 A,B 为二任意常数或二关于时间 t 的任意函数. 特别取 $\lambda=\lambda_0=-1$，$A=B=\dfrac{1}{2}$，则由(10.4.11)式求得下列特解：

$$\psi_0^* = \cosh x \quad (10.4.12)$$

(10.4.11)式和(10.4.12)式一并代入到(10.4.9)式,求得:

$$\begin{cases}\psi = Ae^{\sqrt{-\lambda}x}(\sqrt{-\lambda} - \tanh x) - Be^{-\sqrt{-\lambda}x}(\sqrt{-\lambda} + \tanh x) \\ u = -2\mathrm{sech}^2 x\end{cases} \quad (10.4.13)$$

这是由 $u_0=0$,$\psi_0^*=\cosh x$ 代入到 Darboux 变换(10.4.9)所得到的 ψ 和 u 的解.这比直接求解 Lax 对(10.4.2)要相对容易.

李翊神提出了一种新的 Darboux 变换:

$$\begin{cases}\psi = \psi_0 + \dfrac{G}{F} \\ u = u_0 - 2\dfrac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2} = u_0 - \dfrac{2}{F}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{2}{F^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\end{cases} \quad (10.4.14)$$

其中 ψ 与 u 满足(10.4.2)式,ψ_0 与 u_0 满足(10.4.6)式.而 F 和 G 待定.

(10.4.14)式代入(10.4.2)的第一式有

$$\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + (\lambda - u_0)\psi_0\right] + \frac{1}{F}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + (\lambda - u_0)G + 2G\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{F^2}\left[-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G - 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\psi_0\right] = 0 \quad (10.4.15)$$

(10.4.15)式左端第一项为零,我们使第二项和第三项为零分别得到

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + (\lambda - u_0)G + 2G\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (10.4.16)$$

$$-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G - 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\psi_0 = 0 \quad (10.4.17)$$

(10.4.17)式对 G 而言是一阶线性常微分方程,很易求得

$$G = f(C - g) \quad (10.4.18)$$

其中 C 为积分常数,且

$$f \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{1/2}, \quad g = \int \psi_0 f \mathrm{d}x \quad (10.4.19)$$

(10.4.18)式代入到方程(10.4.16)，得到

$$-g\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\lambda_0-u_0)f\right]+f\left[-(\lambda-\lambda_0)g+\psi_0\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right]$$

$$+C\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\lambda-u_0)f\right]=0 \qquad (10.4.20)$$

我们选择 f 满足方程(10.4.7)，即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\lambda_0-u_0)f=0 \qquad (10.4.21)$$

也就是说 f 是当 $\lambda=\lambda_0$ 时，方程(10.4.6)的一个特解.

(10.4.21)式代入(10.4.20)式，得到

$$\psi_0\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=(\lambda-\lambda_0)g-(\lambda-\lambda_0)C \quad (10.4.22)$$

但(10.4.21)式乘 ψ_0，(10.4.6)式乘 f 后相减有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_0\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=(\lambda-\lambda_0)\psi_0 f \qquad (10.4.23)$$

上式对 x 积分一次有

$$\psi_0\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=(\lambda-\lambda_0)g+C_1 \qquad (10.4.24)$$

其中 C_1 为积分常数. 比较(10.4.24)式和(10.4.22)式，取 $C_1=-(\lambda-\lambda_0)C$，两式一致. 因此，(10.4.18)式满足方程(10.4.16).

利用(10.4.18)式和(10.4.19)式，新的 Darboux 变换(10.4.14)改写为

$$\begin{cases}\psi=\psi_0+\dfrac{f}{F}\left(C-\displaystyle\int f\psi_0\mathrm{d}x\right)\\ u=u_0-2\dfrac{\partial^2\ln F}{\partial x^2},\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}=f^2\end{cases} \qquad (10.4.25)$$

10.5 Boussinesq 方程

Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0 \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{10.5.1}$$

可以通过变换(见习题 6.15)

$$x' = \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} x, \quad t' = \frac{c_0^2}{\sqrt{\alpha}} t, \quad u' = \frac{\beta}{3c_0^2} u \tag{10.5.2}$$

化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 3 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0 \tag{10.5.3}$$

它也称为 Boussinesq 方程. 其中 x'、t' 和 u' 又分别记成了 x、t 和 u.

与 KdV 方程类似，若令

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{10.5.4}$$

则方程(10.5.3)还可改写为下列形式的 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{10.5.5}$$

设 w 和 w_0 都是方程(10.5.5)的解，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 6 \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 6 \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{10.5.6}$$

把(10.5.6)的两个方程分别相加和相减，注意

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\Big)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\Big) \\ \qquad + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\Big)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\Big)\Big] \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\Big)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\Big) \\ \qquad + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\Big)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\Big)\Big] \end{cases} \tag{10.5.7}$$

则得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2(w+w_0)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^4(w+w_0)}{\partial x^4} \\
\qquad -3\left[\dfrac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\dfrac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial(w-w_0)}{\partial x}\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}\right]=0 \\
\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} \\
\qquad -3\left[\dfrac{\partial(w-w_0)}{\partial x}\dfrac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}\right]=0
\end{cases}
\tag{10.5.8}
$$

若令

$$
v=w+w_0,\quad v_0=w-w_0 \tag{10.5.9}
$$

则方程组(10.5.8)化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4}+3\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^4 v_0}{\partial x^4}+3\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}
\end{cases}
\tag{10.5.10}
$$

若由此式求得 v 和 v_0,则由(10.5.9)式可求得 w 和 w_0:

$$
w=\frac{1}{2}(v+v_0),\quad w_0=\frac{1}{2}(v-v_0) \tag{10.5.11}
$$

下面,我们寻求 v 和 v_0 之间的 Bäcklund 变换,为简单起见,我们选择 Bäcklund 变换为下列形式:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+f\left(v,v_0,\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\dfrac{\partial v_0}{\partial t}=b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g\left(v_0,v,\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right)
\end{cases}
\tag{10.5.12}
$$

将(10.5.12)的第一式对 t 微商并利用第二式,将(10.5.12)的第二式对 t 微商并利用第一式,则分别有

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= ab\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + a\left(\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + a\frac{\partial^2 g}{\partial v_{0x}^2}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)^2 \\
&\quad + a\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v_0} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v_{0x}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v_0 \partial v_{0x}} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
&\quad + \left[a\frac{\partial g}{\partial v} + b\frac{\partial f}{\partial v_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[f\frac{\partial f}{\partial v} + g\frac{\partial f}{\partial v_0}\right. \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v_0}{\partial x} + a\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad \left. + a\frac{\partial^2 g}{\partial v_0^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + 2a\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v_0}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial x}\right] = 0 \\
\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} &= ab\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + b\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 \\
&\quad + b\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v_0} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v_0 \partial v_x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v_x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&\quad + \left[a\frac{\partial g}{\partial v} + b\frac{\partial f}{\partial v_0} + \left(\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right)^2\right]\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \left[g\frac{\partial g}{\partial v_0}\right. \\
&\quad + f\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v_0}\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&\quad \left. + b\frac{\partial^2 f}{\partial v_0^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v_0}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial x}\right] = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{10.5.13}
$$

其中

$$
v_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x}, v_{0x} \equiv \frac{\partial v_0}{\partial x}.
$$

将(10.5.13)的第一式与(10.5.10)的第一式比较，(10.5.13)的第二式与(10.5.10)的第二式比较，得到

$$
\left\{\begin{aligned}
&ab = 1, \quad a\left(\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right) = 0, \quad a\frac{\partial^2 g}{\partial v_{0x}^2} = 0 \\
&a\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v_0} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v_{0x}}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v_0 \partial v_{0x}}\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) = 3\frac{\partial v_0}{\partial x} \\
&a\frac{\partial g}{\partial v} + b\frac{\partial f}{\partial v_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)^2 = 1 + 3\frac{\partial v}{\partial x} \\
&f\frac{\partial f}{\partial v} + g\frac{\partial f}{\partial v_0} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v_0}{\partial x} + a\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
&\qquad + a\frac{\partial^2 g}{\partial v_0^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + 2a\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v_0}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \\
&ab = 1, \quad b\left(\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right) = 0, \quad b\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2} = 0 \\
&b\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v_0} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v_x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v_0 \partial v_x}\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) = 3\frac{\partial v_0}{\partial x} \\
&a\frac{\partial g}{\partial v} + b\frac{\partial f}{\partial v_0} + \left(\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\right)^2 = 1 + 3\frac{\partial v}{\partial x} \\
&f\frac{\partial g}{\partial v} + g\frac{\partial g}{\partial v_0} + \frac{\partial g}{\partial v_0}\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v_{0x}}\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial^2 f}{\partial v_0^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 \\
&\qquad + b\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v_0}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right.
\tag{10.5.14}
$$

这是确定 f 和 g 的方程组. 由(10.5.14)的最简单的几个方程有

$$
b = \frac{1}{a} \tag{10.5.15}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial v_x} = -\frac{\partial g}{\partial v_{0x}} \tag{10.5.16}
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial v_{0x}^2} = 0 \tag{10.5.17}
$$

这样,我们可以把(10.5.12)式中的 f 和 g 改写为

$$
\begin{cases}
f\left(v, v_0, \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = F(v, v_0) + H(v, v_0) v_x \\
g\left(v_0, v, \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right) = G(v, v_0) - H(v, v_0) v_{0x}
\end{cases}
\tag{10.5.18}
$$

其中 F,G 和 H 待定.(10.5.18)式自动满足(10.5.16)式和(10.5.17)式.

(10.5.18)式代入(10.5.14)式的较复杂的几个方程有

$$
\begin{cases}
a\left(\dfrac{\partial F}{\partial v} + \dfrac{\partial G}{\partial v_0}\right) - a\dfrac{\partial H}{\partial v} v_x - 3a\dfrac{\partial H}{\partial v_0} v_{0x} = 3v_{0x} \\
\left(a\dfrac{\partial G}{\partial v} + b\dfrac{\partial F}{\partial v_0} + H^2\right) + b\dfrac{\partial H}{\partial v_0} v_x - a\dfrac{\partial H}{\partial v} v_{0x} = 1 + 3v_x \\
F\dfrac{\partial F}{\partial v} + G\dfrac{\partial F}{\partial v_0} + \left(F\dfrac{\partial H}{\partial v} + G\dfrac{\partial H}{\partial v_0} + 2H\dfrac{\partial F}{\partial v}\right) v_x \\
\quad + \left(2H\dfrac{\partial H}{\partial v} + a\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) v_x^2 + a\dfrac{\partial^2 G}{\partial v_0^2} v_{0x}^2 + 2a\dfrac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_0} v_{0x} v_x \\
\quad - a\dfrac{\partial^2 H}{\partial v^2} v_{0x} v_x^2 - 2a\dfrac{\partial^2 H}{\partial v \partial v_0} v_{0x}^2 v_x - a\dfrac{\partial^2 H}{\partial v_0^2} v_{0x}^3 = 0 \\
b\left(\dfrac{\partial F}{\partial v} + \dfrac{\partial G}{\partial v_0}\right) + 3b\dfrac{\partial H}{\partial v} v_x + b\dfrac{\partial H}{\partial v_0} v_{0x} = 3v_{0x} \\
\left(a\dfrac{\partial G}{\partial v} + b\dfrac{\partial F}{\partial v_0} + H^2\right) + b\dfrac{\partial H}{\partial v_0} v_x - a\dfrac{\partial H}{\partial v} v_{0x} = 1 + 3v_x \\
F\dfrac{\partial G}{\partial v} + G\dfrac{\partial G}{\partial v_0} - \left(F\dfrac{\partial H}{\partial v} + G\dfrac{\partial H}{\partial v_0} + 2H\dfrac{\partial G}{\partial v_0}\right) v_{0x} \\
\quad + \left(2H\dfrac{\partial H}{\partial v_0} + b\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_0^2}\right) v_{0x}^2 + b\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} v_x^2 + 2b\dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial v_0} v_{0x} v_x \\
\quad + b\dfrac{\partial^2 H}{\partial v_0^2} v_{0x}^2 v_x + 2b\dfrac{\partial^2 H}{\partial v \partial v_0} v_x^2 v_0 + b\dfrac{\partial^2 H}{\partial v^2} v_x^3 = 0
\end{cases}
\tag{10.5.19}
$$

由此得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial v}+\dfrac{\partial G}{\partial v_0}=0, \quad \dfrac{\partial H}{\partial v}=0, \quad -a\dfrac{\partial H}{\partial v_0}=1, \quad b\dfrac{\partial H}{\partial v_0}=3 \\
a\dfrac{\partial G}{\partial v}+b\dfrac{\partial F}{\partial v_0}+H^2=1, \quad F\dfrac{\partial F}{\partial v}+G\dfrac{\partial F}{\partial v_0}=0, \\
F\dfrac{\partial G}{\partial v}+G\dfrac{\partial G}{\partial v_0}=0 \\
F\dfrac{\partial H}{\partial v}+G\dfrac{\partial H}{\partial v_0}+2H\dfrac{\partial F}{\partial v}=0, \quad F\dfrac{\partial H}{\partial v}+G\dfrac{\partial H}{\partial v_0}+2H\dfrac{\partial G}{\partial v_0}=0 \\
\dfrac{\partial^2 G}{\partial v_0^2}=0, \quad \dfrac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_0}=0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial v^2}=0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial v\partial v_0}=0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial v_0^2}=0 \\
\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial v\partial v_0}=0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial v_0^2}=0, \quad 2H\dfrac{\partial H}{\partial v}+a\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}=0, \\
2H\dfrac{\partial H}{\partial v_0}+b\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_0^2}=0
\end{cases}
\tag{10.5.20}
$$

因而

$$
\frac{a}{b}=-\frac{1}{3} \tag{10.5.21}
$$

结合(10.5.15)式有

$$
a^2=-\frac{1}{3}, \quad b^2=-3 \tag{10.5.22}
$$

同时，由(10.5.20)式定出

$$
\begin{cases}
F=A_0+A_1v_0+A_2v_0^2+A_3v_0^3 \\
G=0 \\
H=B_0+B_1v_0
\end{cases}
\tag{10.5.23}
$$

其中 A_0, A_1, A_2, A_3, B_0 和 B_1 为常数，满足

$$
\begin{cases}
B_1=3a=\dfrac{3}{b}, \quad A_2=B_0, \quad A_3=a \\
bA_1+A_2^2=1 \quad (A_1=a(1-A_2^2)=a(1-B_0^2))
\end{cases}
\tag{10.5.24}
$$

(10.5.23)式和(10.5.24)式代入(10.5.18)式求得

$$\begin{cases} f = A_0 + (a - aA_2^2)v_0 + A_2 v_0^2 + av_0^3 + (3av_0 + A_2)\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ g = -(3av_0 + A_2)\dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}$$

(10.5.25)

(10.5.25)式代入(10.5.12)式，记 $A_0=\lambda, A_2=\mu$，则求得 v 和 v_0 之间的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (3av_0 + \mu)\dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda + (a - a\mu^2)v_0 + \mu v_0^2 + av_0^3 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial t} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (3av_0 + \mu)\dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}$$

(10.5.26)

注意 $a^2=-1/3$，(10.5.26)的第二式两边乘以 a，并记 $\sigma=a\mu$，则它可以写为

$$a\frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}v_0^2 - \sigma v_0\right) \qquad (10.5.27)$$

有了 Bäcklund 变换，我们就可以根据 Boussinesq 方程的一个解去找它的另一个解. 例如 $w_0=0$ 是方程(10.5.5)的一个解，则由(10.5.11)式

$$v = v_0 = w \qquad (10.5.28)$$

则 Bäcklund 变换(10.5.26)式化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (3aw + \mu)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \lambda \\ \qquad + (a - a\mu^2)w + \mu w^2 + aw^3 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (3aw + \mu)\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \qquad (10.5.29)$$

为此，求它的行波解，令

$$w = w(\xi), \quad \xi = a(x - ct) \quad (c = 常数) \qquad (10.5.30)$$

代入(10.5.29)的第二式有

$$-ac\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} = a\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - 3a^2 w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} - a\mu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} \qquad (10.5.31)$$

上式取 $\mu=c$，并注意 $3a^2=-1$，则化为

$$a\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\xi^2}+w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}=0 \qquad (10.5.32)$$

方程(10.5.32)两边对 ξ 积分一次，取积分常数为 $2a^2$，则得

$$a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{2}w^2=2a^2 \qquad (10.5.33)$$

这是 Riccati 方程. 若令

$$w=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} \qquad (10.5.34)$$

则方程(10.5.33)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}-z=0 \qquad (10.5.35)$$

取它的解为

$$z=\cosh\xi \qquad (10.5.36)$$

代入(10.5.34)式求得

$$w=2a\tanh\xi=2a\tanh a(x-ct) \qquad (10.5.37)$$

将上式代入(10.5.29)的第一式定得

$$c^2=1+4a^2,\quad \lambda=4a^2c \qquad (10.5.38)$$

(10.5.37)式代入(10.5.4)式，求得 Boussinesq 方程(10.5.13)的解为

$$u=2a^2\mathrm{sech}^2\xi=2a^2\mathrm{sech}^2a(x-ct) \qquad (10.5.39)$$

这是孤立波解. 这是(6.5.13)式中 $\alpha=1,\beta=3,u_1=2a^2,u_2=0$ 的情况.

类似，利用图 10-1 的构思可得到 Boussinesq 方程解的叠加公式. 由(10.5.27)式有

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial(w_1-w_0)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(w_1+w_0)}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(w_1-w_0)^2-\sigma_1(w_1-w_0)\right] \\ a\dfrac{\partial(w_2-w_0)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(w_2+w_0)}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(w_2-w_0)^2-\sigma_2(w_2-w_0)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial(w_3-w_1)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(w_3+w_1)}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(w_3-w_1)^2-\sigma_2(w_3-w_1)\right] \\ a\dfrac{\partial(w_3-w_2)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(w_3+w_2)}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(w_3-w_2)^2-\sigma_1(w_3-w_2)\right] \end{cases}$$

(10.5.40)

其中的第二式减去第一式,第四式减去第三式,分别得到

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}(w_2-w_1)+\dfrac{1}{2}(w_2-w_1)(w_2-2w_0+w_1) \\ \qquad -\sigma_2(w_2-w_0)+\sigma_1(w_1-w_0)\Big] \\ a\dfrac{\partial(w_1-w_2)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}(w_2-w_1)+\dfrac{1}{2}(w_1-w_2)(2w_3-w_1-w_2) \\ \qquad -\sigma_1(w_3-w_2)+\sigma_2(w_3-w_1)\Big] \end{cases}$$

(10.5.41)

再把(10.5.41)的两式相加,则得

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[2\frac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}+(w_2^2-w_1^2)-(w_2-w_1)(w_0+w_3) + \sigma_1(w_1+w_2)-\sigma_2(w_1+w_2)+(\sigma_2-\sigma_1)(w_0+w_3)\Big]=0$$

(10.5.42)

上式两边对 x 积分,取积分常数为 λ,则求得 Boussinesq 方程(10.5.3)解的非线性叠加公式为

$$w_3=-w_0+\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2+w_2-w_1}\Big[\lambda+2\frac{\partial}{\partial x}(w_2-w_1) + (w_2^2-w_1^2)+(\sigma_1-\sigma_2)(w_1+w_2)\Big] \qquad (10.5.43)$$

利用此公式可由 w_0,w_1 和 w_2 去求 w_3.

习 题 10

10.1 证明正弦-Gordon 方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u$ 作变换 $\zeta=\alpha\xi+\beta\eta$ 可化

为 $\alpha\beta\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}=\sin u$.

10.2 证明：Darboux 变换(10.4.9)可改写为

$$\begin{cases}\psi=\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x}-\left(\dfrac{\partial\ln\psi_0^*}{\partial x}\right)\psi_0\\ u=\lambda_0+\psi_0^*\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\psi_0^*}\right)\end{cases}$$

提示：$2\dfrac{\partial^2\ln\psi_0^*}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\psi_0^*}\dfrac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x^2}-\psi_0^*\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\psi_0^*}\right)$

10.3 证明下列特解

(1) $\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+[-(n+1)^2+n(n+1)\mathrm{sech}^2x]\psi_0=0$,

$\psi_0^*=\cosh^{n+1}x$

(2) $\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+[-n^2+n(n+1)\mathrm{sech}^2x]\psi_0=0$, $\quad\psi_0^*=\mathrm{sech}^n x$

10.4 设 ψ_0 满足下列方程

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+(\lambda-u_0)\psi_0=0$$

其中 $u_0=-n(n+1)\mathrm{sech}^2x\quad(n=0,1,2,\cdots)$

已知：当 $\lambda=\lambda_0=-(n+1)^2\quad(n=0,1,2,\cdots)$时有特解：

$$\psi_0^*=\cosh^{n+1}x$$

求 Darboux 变换

(1) $n=0,\lambda_0=-1,u_0=0,\psi_0^*=\cosh x$

(2) $n=1,\lambda_0=-4,u_0=-2\mathrm{sech}^2x,\quad\psi_0^*=\cosh^2x$

并证明一般情况下的 Darboux 变换为

$$\psi=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-n\tanh x\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(n-1)\tanh x\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\tanh x\right)\psi_0,$$

$$\psi_0=Ae^x+Be^{-x},\qquad u=-(n+1)(n+2)\mathrm{sech}^2x$$

10.5 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3u}{\partial x^3}=0$$

经过 $u=\frac{\partial w}{\partial x}\left(u_0=\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$ 的变换后,Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial w_0}{\partial x}+m-\frac{1}{12\beta}(w-w_0)^2\\ \frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{6}(w-w_0)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\\ \qquad -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]\end{cases}$$

提示:根据习题 6.2,将(10.3.25)的第一式和(10.3.26)式中的 x 换为 $\beta^{-1/3}x$,w 和 w_0 分别换为 $-\frac{1}{6}\beta^{-2/3}w$ 和 $-\frac{1}{6}\beta^{-2/3}w_0$.

10.6 证明非线性叠加公式(10.3.37).

10.7 证明 Liouville 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{au}$$

的解为

$$u=F(x)-G(y)-\frac{2}{a}\ln f(x,y)$$

其中

$$f(x,y)=b\int \mathrm{e}^{aF(x)}\mathrm{d}x+\frac{a}{2b}\int \mathrm{e}^{-aG(y)}\mathrm{d}y$$

$F(x)$ 和 $G(y)$ 是任意函数,b 为任意常数.

10.8 设 $w_0=0$,$w_1=-2\tanh(x-4t)$,$w_2=-4\coth(2x-32t)$,$\lambda_1=-1$,$\lambda_2=-4$. 根据 KdV 方程的叠加公式求 w_3 和 u_3.

提示:

$$w_3=-\frac{6}{2\coth(2x-32t)-\tanh(x-4t)}$$

$$u_3=-12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)]^2}$$

又注意在(10.3.27)式中 w 变为 $-\frac{4\lambda}{w}$，方程不变，因而 w_1，w_2 均是它的解.

*10.9 证明 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2|u|^2 u=0$$

的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+(u-u_0)\sqrt{4\lambda^2-|u+u_0|^2}\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial u_0}{\partial t}+\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)\sqrt{4\lambda^2-|u+u_0|^2}\\ \qquad+\dfrac{\mathrm{i}}{2}(u+u_0)[|u+u_0|^2+|u-u_0|^2]\end{cases}$$

其中 u 和 u_0 满足 NLS 方程. 并在 $u_0=0$ 的条件下求 NLS 方程的解.

*10.10 证明 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+2k\sin(w-w_0)\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial t}-2k\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)\cos(w-w_0)\right.\\ \qquad\left.+(u^2-u_0^2)\sin(w-w_0)\right\}\end{cases}$$

其中 $u\equiv\frac{\partial w}{\partial x}$，$u_0\equiv\frac{\partial w_0}{\partial x}$，$u$ 和 u_0 满足 mKdV 方程. 取 $w_0=0$，证明

$$w=\pm 2\tan^{-1}\{\mathrm{e}^{2k(x-4k^2t-x_0)}\}$$

引进 k_1,k_2 和 w_1,w_2,w_3. 证明 w 的叠加公式为

$$w_3=w_0+2\tan^{-1}\left\{\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\tan\frac{1}{2}(w_2-w_1)\right\}.$$

10.11 应用 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = u - v^2 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \end{cases}$$

证明 u 和 v 分别满足下列 KdV 方程和 mKdV 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - 6v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \end{cases}$$

附录 A　线性常微分方程

1. 一阶线性常微分方程

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{A.1}$$

其通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{C - \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right\} \tag{A.2}$$

其中 C 为任意常数.

2. 二阶齐次线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A.3}$$

其通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{A.4}$$

C_1 和 C_2 为二任意常数. y_1 和 y_2 为方程(A.3)的两个线性无关的解,它们的 Wronski 行列式

$$W(y_1, y_2) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{A.5}$$

y_1 与 y_2 之间存在 Liouville 公式

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{A.6}$$

已知 y_1 可以由(A.6)式求 y_2.

方程(A.3)作变换

$$y = z \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{A.7}$$

可消去方程(A.3)中的一阶导数项,而使方程(A.3)化为

$$z'' + r(x)z = 0 \tag{A.8}$$

其中

$$r(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}[p(x)]^2 \tag{A.9}$$

3. 二阶常系数方程

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a,b\text{ 为常数}) \tag{A.10}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{A.11}$$

相应的特征根为

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2, & a^2 - 4b > 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2, & a^2 - 4b = 0 \\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, & a^2 - 4b < 0 \end{cases} \tag{A.12}$$

方程(A.10)的通解为

$$y = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, & a^2 - 4b > 0 \\ (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, & a^2 - 4b = 0 \\ e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), & a^2 - 4b < 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

4. Euler 方程

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{A.14}$$

作变换

$$x = e^t \quad \left(x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}, x^2\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt}\right) \tag{A.15}$$

化为下列常系数方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0 \tag{A.16}$$

5. Legendre 方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0 \tag{A.17}$$

满足 $y\Big|_{x=\pm 1} < \infty$ 的本征值和本征函数分别为

$$\mu = l(l+1) \quad (l = 0,1,2,\cdots) \tag{A.18}$$

$$y = \mathrm{P}_l(x) \quad (\text{Legendre 多项式}) \tag{A.19}$$

连带 Legendre 方程

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0 \qquad (\text{A}.20)$$

满足 $z\Big|_{x=\pm 1}<\infty$的本征值和本征函数分别为

$$\mu = l(l+1) \quad (l = m, m+1, \cdots) \qquad (\text{A}.21)$$

$$z = \mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad \text{(连带 Legendre 函数)} \qquad (\text{A}.22)$$

6. Weber 方程

$$z'' + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}x^2\right)z = 0 \qquad (\text{A}.23)$$

满足 $z\Big|_{x\to\pm\infty}<\infty$的本征值和本征函数分别为

$$\mu = 2n+1 \quad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (\text{A}.24)$$

$$z = D_n(x) \quad \text{(Weber 函数或抛物线柱函数)} \qquad (\text{A}.25)$$

7. Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0 \qquad (\text{A}.26)$$

的通解为

$$y = A\mathrm{J}_\nu(x) + B\mathrm{Y}_\nu(x) \qquad (\text{A}.27)$$

$\mathrm{J}_\nu(x)$和 $\mathrm{Y}_\nu(x)$分别为 Bessel 函数和 Neumann 函数.

8. 变形 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0 \qquad (\text{A}.28)$$

的通解为

$$y = A\mathrm{I}_\nu(x) + B\mathrm{K}_\nu(x) \qquad (\text{A}.29)$$

$\mathrm{I}_\nu(x)$和 $\mathrm{K}_\nu(x)$分别为变形 Bessel 函数和第二类变形 Bessel 函数.

9. Airy 方程

$$y'' - xy = 0 \qquad (\text{A}.30)$$

的通解为

$$y = AA_i(x) + BB_i(x) \qquad (\text{A}.31)$$

$A_i(x)$和 $B_i(x)$分别为第一类和第二类 Airy 函数.

10. 合流超比方程(Kummer 方程)

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{A.32}$$

在 $\gamma \neq$ 整数时的通解为

$$y = AF(\alpha,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \tag{A.33}$$

$F(\alpha,\gamma,x)$为合流超比函数(Kummer 函数).

11. 超比方程(Gauss 方程)

$$x(1 - x)y'' + \{\gamma - (1 + \alpha + \beta)x\}y' - \alpha\beta y = 0 \tag{A.34}$$

在 $\gamma \neq$ 整数时的通解为

$$y = AF(\alpha,\beta,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \tag{A.35}$$

$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$为超比函数(Gauss 函数).

12. Fuchs 型方程

三个正则奇点 $x=a,b,\infty$的 Fuchs 型方程为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A.36}$$

其中

$$p(x) = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{x - b},$$

$$q(x) = \frac{B_1}{(x - a)^2} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \frac{C_1}{x - a} + \frac{C_2}{x - b} \quad (C_1 + C_2 = 0) \tag{A.37}$$

设正则奇点 $x=a,b,\infty$的指标分别是(α_1,β_1),(α_2,β_2),(α_3,β_3),则

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1 - A_1, & \alpha_1\beta_1 = B_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 - A_2, & \alpha_2\beta_2 = B_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 = A_1 + A_2 - 1, & \alpha_3\beta_3 = B_1 + B_2 + aC_1 + bC_2 \end{cases} \tag{A.38}$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 1)$$

方程(A.36)的全部解用下列 Riemann$P$ 符号表示

$$y = P\begin{Bmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3, & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} \tag{A.39}$$

它可以通过自变量和因变量变换化为超比方程求解. 超比方程(A.34)的 Reimann$P$ 符号为

$$y = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha, & x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \tag{A.40}$$

附录B 自治系统

不明显含自变量的常微分方程称为自治系统.

1. 一维自治系统

$$\dot{x} = F(x) \tag{B.1}$$

其中 $\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 其定常解或平衡点 $x=x^*$ 满足

$$F(x^*) = 0 \tag{B.2}$$

定常解的稳定性决定于

$$\lambda \equiv \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x^*} \tag{B.3}$$

当 $\lambda<0$ 时,轨道 $x=x(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 而接近定常解,定常解是稳定的,称为稳定结点;当 $\lambda>0$ 时,轨道 $x=x(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 而远离定常解,定常解是不稳定的,称为不稳定结点;当 $\lambda=0$ 时,轨道 $x=x(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 从一侧接近定常解,而在另一侧远离定常解,定常解称为鞍点.

2. 二维自治系统

$$\begin{cases}\dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y)\end{cases} \tag{B.4}$$

其中 $\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 其定常解或平衡点 $(x,y)=(x^*,y^*)$ 满足

$$\begin{cases}F(x^*,y^*) = 0 \\ G(x^*,y^*) = 0\end{cases} \tag{B.5}$$

定常解的稳定性决定于该点的 Jacobi 矩阵

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*,y^*)} \tag{B.6}$$

的特征值 λ. 它满足特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{B.7}$$

在 λ 为实数且不为零的条件下，当 $\lambda_1<0$ 和 $\lambda_2<0$ 时，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 而接近定常解，定常解是稳定的，称为稳定结点；当 $\lambda_1>0$ 和 $\lambda_2>0$ 时，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 而远离定常解，定常解是不稳定的，称为不稳定结点；当 $\lambda_1>0$ 和 $\lambda_2<0$ 时，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 随时间 $t\to+\infty$，从一些方向接近定常解，而从另一些方向远离定常解，定常解称为鞍点. 在 λ 为共轭复数且 $\mathrm{Re}\lambda\neq0$ 的条件下，当 $\mathrm{Re}\lambda_1<0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda_2<0$ 时，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 螺旋式地接近定常解，定常解是稳定的，称为稳定焦点；当 $\mathrm{Re}\lambda_1>0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda_2>0$ 时，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 随时间 $t\to+\infty$ 螺旋式地远离定常解，定常解是不稳定的，称为不稳定焦点；在 λ 为纯虚数（即 $\mathrm{Re}\lambda=0$）的条件下，在相平面 (x,y) 上的轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 可能是围绕定常解的闭合轨道，定常解称为中心，另一种可能定常解是焦点.

附录 C　椭圆积分和椭圆函数

1. Legendre 椭圆积分

第一类 Legendre 椭圆积分为

$$u = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{t=\sin\phi} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}dx \tag{C.1}$$

其中 $0<k<1$ 称为模数.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\,dx \tag{C.2}$$

称为第一类 Legendre 完全椭圆积分.

2. Jacobi 椭圆函数

从(C.1)式知,u 是 t 和 k 的函数,反过来也可认为 t 是 u 和 k 的函数,即

$$t = \mathrm{sn}(u,k) = \sin\phi \tag{C.3}$$

称为 Jacobi 椭圆正弦函数.

$$\sqrt{1 - t^2} = \mathrm{cn}(u,k) = \cos\phi \tag{C.4}$$

称为 Jacobi 椭圆余弦函数.

$$\sqrt{1 - k^2t^2} = \mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi} \tag{C.5}$$

称为第三种 Jacobi 椭圆函数.

3. 特殊点的值

$$\mathrm{sn}(0,k) = 0,\quad \mathrm{cn}(0,k) = 1,\quad \mathrm{dn}(0,k) = 1 \tag{C.6}$$

$$\mathrm{sn}(K,k) = 1,\quad \mathrm{cn}(K,k) = 0,\quad \mathrm{dn}(K,k) = k' \equiv \sqrt{1 - k^2} \tag{C.7}$$

4. 恒等式

$$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1 \tag{C.8}$$

$$1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u = \mathrm{dn}^2 u \tag{C.9}$$

$$k^2 \mathrm{cn}^2 u + k'^2 = \mathrm{dn}^2 u \tag{C.10}$$

$$\mathrm{cn}^2 u + k'^2 \mathrm{sn}^2 u = \mathrm{dn}^2 u \tag{C.11}$$

5. 奇偶性

$$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}u, \quad \mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}u, \quad \mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}u \tag{C.12}$$

6. 微商公式

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sn}u)}{\mathrm{d}u} = (\mathrm{cn}u)(\mathrm{dn}u) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u} \cdot \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u} \tag{C.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{cn}u)}{\mathrm{d}u} = -(\mathrm{sn}u)(\mathrm{dn}u) = -\sqrt{1-\mathrm{cn}^2 u} \cdot \sqrt{k'^2 + k^2\mathrm{cn}^2 u} \tag{C.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{dn}u)}{\mathrm{d}u} = -k^2(\mathrm{sn}u)(\mathrm{cn}u) = -\sqrt{1-\mathrm{dn}^2 u} \cdot \sqrt{\mathrm{dn}^2 u - k'^2} \tag{C.15}$$

7. 退化

(1) $k \to 0$ 时，$K(k) \to \dfrac{\pi}{2}$ (C.16)

$$\mathrm{sn}u \to \sin u, \quad \mathrm{cn}u \to \cos u, \quad \mathrm{dn}u \to 1 \quad (k \to 0) \tag{C.17}$$

(2) $k \to 1$ 时，$K(k) \to \infty$ (C.18)

$$\mathrm{sn}u \to \tanh u, \quad \mathrm{cn}u \to \mathrm{sech}u, \quad \mathrm{dn}u \to \mathrm{sech}u \quad (k \to 1), \tag{C.19}$$

8. 周期性

$$\mathrm{sn}(u + 4K) = \mathrm{sn}u \tag{C.20}$$

$$\mathrm{cn}(u + 4K) = \mathrm{cn}u \tag{C.21}$$

$$\mathrm{dn}(u + 2K) = \mathrm{dn}u \tag{C.22}$$

9. Weierstrass 椭圆积分

第一类 Weierstrass 椭圆积分为

$$z = \int_{\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \mathrm{d}x \tag{C. 23}$$

其中 g_1 和 g_2 为常数.

10. Weierstrass 椭圆函数

从(C. 23)式知,z 是 η, g_2 和 g_3 的函数,反过来也可认为 η 是 z, g_2 和 g_3 的函数,即

$$\eta = p(z; g_2, g_3) \tag{C. 24}$$

称为 Weierstrass 椭圆函数.

显然有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} \tag{C. 25}$$

参 考 文 献

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear evolutions and inverse scattering transform. Cambridge University Press, 1991

[2] Ames W F. Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol 1. Academic Press, 1965

[3] Ames W F. Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol 2. Academic Press, 1972

[4] Acton J R, Squire P T. Solving equations with physical understanding. Adam Hilger Led, 1985

[5] Bateman H, Erdelyi A. Higher transendental functions. McGraw-Hill, 1995

[6] Bhatnagar P L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. Clarerdon Press, 1979

[7] Bluman G W, Cole I D. Similarity methods for differential equations. Springer, 1974

[8] Bluman G W, Kumes S. Symmetries and differential equations. Applied Mathematical Sciences, Vol 81. Springer-Verlag, 1989

[9] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. J Math Phys, 1989, 30

[10] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, Morris H C. Solitons and Nonlinear wave equations. Academic Press, 1984

[11] Drazin P G, Johnson R S. Soliton: an Introdaction. Cambridge University Press, 1988

[12] Fushchich W I, Serov N I, Shtelen W M. Some exact solutions of Multidimensional nonlinear d'Aembert, Liouville, eikonal and Dirac equations, in: Group-theoretical methods in physics. Harwood Academic Publ, 1984

[13] Fushchich W I, Shtelen W M. On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics. Phys Lett B, 1985. 128
[14] Fushchich W I, Shtelen W M, Serov N I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. Kluwer Academic Publ, 1993
[15] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M. Method for solving the Kortweg-de Vries equation. Phys Rev Lett, 1967. 19
[16] 谷超豪等. 孤立子理论与应用. 浙江：科学技术出版社，1990
[17] 郭柏灵，庞小峰. 孤立子. 北京：科学出版社，1987
[18] 郭柏灵. 非线性波和孤立子. 力学与实践，1982. 4
[19] Guo Boling. Some problems of the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations in dispersive effects. Nonlinear Physics, 1989
[20] Grundland A M, Harnad J, Winternitz D. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations. J Math Phys, 1984. 25
[21] Hirota R. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solution. Phys Rev Lett, 1971. 27
[22] Ibragimov N K. Transformation groups applied to Mathematical Physics. Reidel Publ Company. 1985
[23] Jackson E A. Perspectives of nonlinear dynamics. Cambridge University, 1989
[24] Kolk W R. Nonlinear system dynamics. Reinhold, 1992
[25] Lakshmanan M, Kaliappan P. Lie transfor mations, nonlinear evolution equations, and Painleve forms. J Math Phys, 1983. 24
[26] Landau L D, Lifshits E M. Quantum Mechanics Non-Relativistic theory. Pergamon Press, 1965
[27] 刘式达，刘式适. 大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波. 中国科学，1982. 4
[28] 刘式适，刘式达. 特殊函数. 北京：气象出版社，1988
[29] Liu S K, Liu S D. Heteroclinic orbit on the KdV-Burgers equation and Fisher equation. Commun Theor Phys, 1991. 16
[30] Liu S K, Liu S D. On the dispersion effects of atmospheric motion. Dyn Atmos Oceans, 1995. 22

[31] 李翊神. KdV 和 KP 方程新型的 Darboux 变换. 中国科学, 1992. 6
[32] Nayfeh A H. Perturbation methods. John Wiley and Sons Inc, 1973
[33] Nishitani T, Tajiri M. On similarity solutions of the Boussinesq equation. Phys Lett, 1982. 89
[34] Olver P, Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations. Phys Lett A, 1986. 114
[35] Ovsyannikov L V. Group analysis of differential equations. Academic Press, 1982
[36] Rogers C, Shadwick W K. Bäcklund transformations and their applications. Academic Press, 1982
[37] Sachdev P L. Nonlinear diffusive waves. Cambridge University, 1987
[38] Sachdev P L. Nonlinear ordinary differential equations and their applications. Dekker Inc, 1991
[39] Seshadri R, Na T Y. Group invariance in engineering boundary value problems. Springer-Verlag, 1985
[40] Tjon J, Wright J. Solitons in the continuous Hersenberg spin chain. Phys Rev B, 1977. 15
[41] 户田盛和, 渡辺慎介. 非线形力学. 共立出版株式会社, 1983
[42] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The painleve property for partial differential equations. J Math Phys, 1983. 24
[43] Whitham G B. Linear and nonlinear waves. Wiley, 1974